(1)

Subject :

Date

معادل حاصل جمع‌ها (استقرا)

$$1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2^0+2^1+2^2+\dots+2^n=2^{n+1}-1$$

تصاعد هندسی $\quad \sum_{i=0}^{n} r^i=\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

$$\sum_{i=1}^{n} i\,2^i=(n-1)\,2^{n+1}+2$$

لگاریتم

$a,b>1,\quad x,y>0$

$$\log_a 1=0$$

$$a^{\log_a x}=x \qquad \log_a x^y=y\log_a x$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \qquad x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$$

$$\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y \qquad \log_a x=\log_b x/\log_b a$$

$$\ln(10)=2{,}3 \qquad (e=2{,}71)$$

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\approx \ln n \quad\rightarrow$$

در واقع $\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{2}+1$ از $\ln n$ بزرگ‌تر است

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}<\ln n<\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}$$

ترتیب / ترکیب

از چهار توپ A، B، C، D بدون جایگذاری، ۲ توپ را برمی‌داریم. برداشتن A، سپس B با برداشتن B، سپس A متفاوت است ← برای مثال اگر در برداشتن توپ‌ها ترتیب حروف الفبا رعایت شود، برنده می‌شویم!

ترتیب k از n: $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$(n)(n-1)\dots(n-k+1) \xleftarrow{\text{اثبات}}$

ترکیب k از n: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$

حل معادلات بازگشتی برای تحلیل الگوریتم‌های بازگشتی ← مقدمات ریاضی فصل ۲

حل معادلات بازگشتی را با ۳ روش مورد بررسی قرار خواهیم داد: استقرا، معادله مشخصه (شاخص)، جایگزینی

۱. استقرا

مثال در تابع فاکتوریل:

```
int fact(int n)
{
    if (n == 0)
        return 1;
    else
        return n * fact(n-1);   ← ضرب
}
```

مثال از معادله بازگشتی (معادله T(n)) ← $t_n = t_{n-1} + 1$

همان T(n).

در معادلات بازگشتی هر جمله براساس جملات قبلی بیان می‌شود. این معادلات نقطه شروعی به نام وضعیت ابتدا دارند

$t_0 = 0$

Subject :   Date

$t_1 = t_{1-1} + 1 = t_0 + 1 = 1$

$t_2 = t_1 + 1 = 2$

$t_3 = t_2 + 1 = 3$

با ارزیابی تعدادی از مقادیر اولیه، می توان $t_n = n$ را به عنوان جواب ساده بازگشتی گمان کرد

با روش استقرا درستی $t_n = n$ را بررسی می کنیم.

پایه استقرا $\quad n = 0 \Rightarrow t_0 = 0$

فرض ~ $\quad t_n = n$

گام ~ (حکم) $\quad t_{n+1} = n + 1 \qquad$ باید نشان دهیم t_n برابر با $n+1$ است

اثبات:

$$t_{n+1} = t_n + 1 = n + 1$$

مثال ۱:

$$\begin{cases} t_n = t_{n/2} + 1 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

n توانی از ۲ است

$t_2 = t_1 + 1 = 2$

$t_4 = t_2 + 1 = 3$ — t_3 تولید نمی شود!

$t_8 = t_4 + 1 = 4$

$t_{16} = t_8 + 1 = 5$

$t_n = \lg n + 1$ حدس می زنیم

باید با استقرا اثبات کنیم!

پایه استقرا $\quad t_1 = 1$

فرض استقرا $\quad t_n = \lg n + 1$

گام $\quad t_{2n} = \lg(2n) + 1$

اثبات

$$t_{2n} = t_n + 1 = \lg n + 1 + 1 = \lg n + \lg 2 + 1 = \lg(2n) + 1$$

مثال ۲.

$$\begin{cases} t_n = 7t_{n/2} \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$n>1$ و n توانی از ۲ است

$t_2 = 7t_1 = 7$

$t_4 = 7t_2 = 7^2$

$t_8 = 7t_4 = 7^3$

$t_{16} = 7t_8 = 7^4$

حدس می‌زنیم

$$t_n = 7^{\lg n}$$

پایه استقرا $t_1 = 1$

فرض استقرا $t_n = 7^{\lg n}$

حکم استقرا $t_{2n} = 7^{\lg 2n}$

اثبات

$$t_{2n} = 7t_n = 7 \times 7^{\lg n} = 7^{\lg n + 1} = 7^{\lg n + \lg 2} = 7^{\lg 2n}$$

مثال ۳.

$$\begin{cases} t_n = 2t_{n/2} + n - 1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$t_2 = 2t_1 + 2 - 1 = 1$

$t_4 = 2t_2 + 4 - 1 = 5$

$t_8 = 2t_4 + 8 - 1 = 17$

$t_{16} = 2t_8 + 16 - 1 = 49$

چون قابل حدس نیست! نمی‌توان از استقرا استفاده کرد. استقرا صرفاً برای بررسی درستی جواب حدس زده شده به کار می‌رود.

Subject :   Date

۲_ معادله شاخص

با این روش می‌توان جواب معادلات بازگشتی زیادی را پیدا کرد.

* معادله بازگشتی خطی همگن

تعریف: یک معادله بازگشتی به شکل $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = 0$ که در آن k و عناصر a_i مقادیری ثابت هستند، معادله بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت نامیده می‌شود.

جمع

تعریف: معادله شاخص برای معادله بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت به این صورت تعریف می‌شود:

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \dots + a_k r^0 = 0$$

$r^0 = 1$

قضیه: اگر معادله شاخص دارای k جواب مجزای $r_1, r_2, \dots, r_k$ باشد، می‌توان نتیجه گرفت که تنها جواب معادله به صورت زیر است:

$$t_n = c_1 r_1^n + \dots + c_k r_k^n \longrightarrow$$ c_i ها اختیاری هستند

نکته: مقادیر k ثابت‌های c_i به وسیله وضعیت ابتدایی تعیین می‌شوند.

مثال: دنباله فیبوناچی

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{بازنویسی}} \begin{cases} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

اشتباه کتاب کنکور نشان داده است

مثال:

$$\begin{cases} t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

مطالعه این مثال اختیاری است

معادله شاخص $\quad r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0$

حل " " $\quad r^{n-2}(r^2 - 5r + 6) = r(r-2)(r-3)$

بنابراین: $t_n = 2^n$ ، $t_n = 3^n$ ، $t_n = 0$ جواب‌های معادله بازگشتی هستند.

$$t_n = 0 \Rightarrow 0 - 5\times 0 + 6\times 0 = 0$$

$$t_n = 2^n \Rightarrow 2^n - 5\times 2^{n-1} + 6\times 2^{n-2} = 2^n - 5(2^{n-1}) + 3(2^{n-1})$$
$$= 2^n - 2\times 2^{n-1} = 2^n - 2^n = 0$$

$$t_n = 3^n \Rightarrow 3^n - 5(3^{n-1}) + 6(3^{n-2}) = 3^n - 5(3^{n-1}) + 2(3^{n-1}) =$$
$$3^n - 3(3^{n-1}) = 3^n - 3^n = 0$$

چون 2^n و 3^n جواب‌های معادله هستند، می‌توان نشان داد $c_1\times 3^n + c_2\times 2^n$ نیز جواب‌های معادله می‌باشند.
(با قرار دادن $c_1=0$ و $c_2=0$ ، $t_n=0$ را نیز می‌توان تولید کرد)

با قرار دادن مقادیر مختلف برای c_1 ، c_2 بی‌نهایت جواب برای معادله بازگشتی می‌توان به دست آورد. اما کدام جواب‌ها جواب معادله بازگشتی هستند؟

برای مشخص کردن جواب معادله بازگشتی، از وضعیت ابتدایی استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} t_0 &= c_1\times 3^0 + c_2\times 2^0 = 0 \\ t_1 &= c_1\times 3^1 + c_2\times 2^1 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

بنابراین جواب‌های معادله بازگشتی برابر است با:

$$t_n = 1(3^n) - 1(2^n) = 3^n - 2^n$$

نکته: می‌توان معادله مشخصه در معادله بازگشتی خطی همگن را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$5t_n - 7t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0 \rightarrow 5r^2 - 7r + 6 = 0 \quad (r=0 \text{ بدون در نظر گرفتن})$$

نکته: اگر در مثال بالا، وضعیت ابتدایی به صورت $t_0=1$ ، $t_1=2$ باشد، آنگاه $c_1=0$ و $c_2=1$ خواهد شد.

مثال:
$$\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0 & n>1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

۱- تعیین معادله مشخصه

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

۲- حل معادله مشخصه

$$(r-4)(r+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ r = -1 \end{cases}$$

Subject :   Date

۳- تشکیل جواب عمومی

$$t_n = c_1 4^n + c_2 (-1)^n$$

۴- تعیین مقادیر c_1 و c_2 با استفاده از شرایط اولیه

$$t_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$
$$t_1 = 1 \Rightarrow 4c_1 - c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{5} \quad c_2 = \frac{4}{5}$$

۵- تعیین جواب نهایی

$$t_n = \frac{1}{5} \times 4^n - \frac{1}{5}(-1)^n$$

مثال : (فیبوناچی)

$$\begin{cases} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

۱- تعیین معادله شاخص

$$r^2 - r - 1 = 0$$

۲- حل معادله شاخص

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

۳- تعیین جواب عمومی

$$t_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

۴- تعیین مقادیر c_1 و c_2 با استفاده از شرایط اولیه

$$\left.\begin{array}{l} t_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \\ t_1 = 1 \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} c_2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

۵- تعیین جواب نهایی

$$t_n = \frac{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n}{\sqrt{5}}$$

← این حل برای حد n-ام سری فیبوناچی دلیل مناسب نیست زیرا با افزایش n، دقت کامل $\sqrt{5}$ نیز باید زیاد شود.

$$\sqrt{5} \simeq ۲,۲۳۶۰۶$$

$$\begin{cases} (۲,۲۳)^5 \simeq ۵۵,۱۴۷ \\ (۲,۲۳۶۰۶)^5 \simeq ۵۵,۲۲۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} (۲,۲۳)^{10} \simeq ۳۰۴۱,۲۲ \\ (۲,۲۳۶۰۶)^{10} \simeq ۳۱۲۴,۸۸ \end{cases}$$

گاهی معادله مشخصه دارای ریشه یا ریشه‌ها با توان دار باشد مانند $(r-1)(r-2)^3$. در این صورت قضیه تعیین جواب عمومی به صورت زیر تغییر می‌کند:

قضیه: اگر r یک ریشه با توان m معادله مشخصه برای یک معادله بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت باشد آن گاه

$$t_n = r^n,\quad t_n = nr^n,\quad t_n = n^2 r^n,\ \dots,\ t_n = n^{m-1} r^n$$

جواب‌های معادله بازگشتی همگن مزبور می‌باشند. به عبارت دیگر m جواب t_n، جواب‌های معادله مشخصه بوده و باید برای آن‌ها ضرایب ثابت را تعیین کرد.

مثال:

$$\begin{cases} t_n - 7t_{n-1} - 15t_{n-2} - 9t_{n-3} = 0 \qquad n>1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \qquad t_2 = 2 \end{cases}$$

۱- تعیین معادله مشخصه

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0$$

۲- حل معادله مشخصه

$$(r-1)(r-3)^2 = 0 \qquad r=1,\quad r=3 \ (\text{با توان } 2)$$

۳- تعیین جواب عمومی

$$t_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

۴- تعیین مقادیر c_1، c_2 و c_3 با استفاده از شرایط ابتدایی

$$t_0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$t_1 = 1 \Rightarrow c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 1$

$t_2 = 2 \Rightarrow c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 2 \Rightarrow c_1 = -1,\ c_2 = 1,\ c_3 = -\frac{1}{3}$

۵- پس جواب کلی:

$$t_n = (-1)(1^n) + (1)(3^n) + \left(\frac{-1}{3}\right)(n3^n) = -1 + 3^n - n3^{n-1}$$

* معادلات بازگشتی خطی ناهمگن

تعریف: معادله بازگشتی به شکل $a_0t_n + a_1t_{n-1} + \dots + a_kt_{n-k} = f(n)$ که در آن k عدد صحیح و a_i ها مقادیر ثابت بوده و $f(n)$ یک تابع غیرصفر است، معادله بازگشتی خطی ناهمگن با ضرایب ثابت می‌گویند.

برای حل این نوع معادلات، روش مشخصی وجود ندارد. برای یک حالت خاص قضیه زیر را طرح می‌کنیم.

قضیه: معادله بازگشتی خطی ناهمگن $a_0t_n + a_1t_{n-1} + \dots + a_kt_{n-k} = b^n p(n)$ می‌تواند به یک معادله بازگشتی خطی همگن تبدیل شود، به طوری که معادله

$$\overbrace{(a_0r^k + a_1r^{k-1} + \dots + a_k)}^{\text{معادله مشخصه بخش همگن}}(r-b)^{d+1} = 0$$

معادله مشخصه آن باشد که در آن d درجه $p(n)$ است.

مثال: مطالعه این مثال اختیاری است

(بدون استفاده از قضیه بالا)

$$\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} = 4^n, & n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 4 \end{cases}$$

$t_{n-1} - 3t_{n-2} = 4^{n-1}$ بازنویسی معادله برای $n-1$

$\frac{t_n}{4} - \frac{3t_{n-1}}{4} = 4^{n-1}$ تقسیم معادله بر ۴

Subject : Date

ضرب در دو ساده از هم

$$\frac{t_n}{4} - \frac{7t_{n-1}}{4} + 3t_{n-2} = 0$$

ضرب در ۴

$$t_n - 7t_{n-1} + 12t_{n-2} = 0$$

این معادله همگن است و با روش مطرح شده قابل حل است.

جواب عمومی به صورت $t_n = c_1 3^n + c_2 4^n$ ، و جواب نهایی به صورت $t_n = 4^{n+1} - 4(3^n)$ می باشد.

در مثال مطرح شده ، $P(n)=1$ است اگر $P(n)$ برابر با یک نباشد، حل آن از این حالت پیچیده می شود
و محاسبات از قضیه استفاده شود.

مثال :

$$\begin{cases} t_n - t_{n-1} = n-1, & n>0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

۱- معادله شاخص بخش همگن

$$t_n - t_{n-1} = 0 \Rightarrow r-1 = 0$$

۲- عبارت مربوط به بخش ناهمگن

$$n-1 = \underbrace{1}_{b^n}\underbrace{(n-1)}_{P(n)} = 1^n(n-1)$$

$$p(n) = n-1,\quad b=1,\quad d=1$$

$$(r-1)^{1+1}$$

۳- تشکیل معادله شاخص

$$(r-1)(r-1)^2$$

۴- حل معادله شاخص

$$(r-1)^3 = 0 \qquad (r=1 \text{ ، ریشه درجه ۳})$$

۵- تعیین جواب عمومی

$$t_n = c_1 \times 1^n + c_2 n \times 1^n + c_3 n^2 \times 1^n = c_1 + c_2 n + c_3 n^2$$

دقت کنید چون سه مجهول داریم، بنابراین تنها با $t_0 = 0$ نمی‌توان c_1, c_2, c_3

مقادیر مجهول را تعیین نمود بنابراین به دو شرط دیگر نیز داریم.

$$t_1 = t_0 + 1 - 1 = 0$$

$$t_2 = t_1 + 2 - 1 = 1$$

۶- تعیین c_1 ، c_2 و c_3

۷- جواب نهایی $t_n = \frac{n(n-1)}{2}$

* تغییر متغیرها

این روش برای برخی معادلات ناهمگن که با تقسیم مطرح شده قابل حل نیستند کاربرد دارد. به دو مثال از این روش توجه کنید.

مثال:

(قبلاً با استقراء حل شد)

$$\begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 & n>1 \text{ ، n توانی از ۲} \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

چرا با تقسیم قابل حل نیست؟ به خاطر $\frac{n}{2}$

تغییر متغیر

چون n توانی از ۲ است آن را به صورت $n = 2^k$ می‌نویسیم. (1)

$$T(2^k) = T(\frac{2^k}{2}) + 1 = T(2^{k-1}) + 1$$

با قرار دادن $t_k = T(2^k)$ خواهیم داشت: (2)

$$t_k = t_{k-1} + 1$$

این معادله یک معادله بازگشتی خطی ناهمگن است که با یک تقسیم مطرح شده قابل حل است.

جواب عمومی $t_k = c_1 + c_2 k$

برای تعیین جواب نهایی ابتدا $T(2^k)$ را به جای t_k قرار می‌دهیم $T(2^k) = c_1 + c_2 k$

در 2^k به جای n قرار می‌دهیم (بنابراین باید به جای k، lg n قرار دهیم)

$$T(n) = c_1 + c_2 \times \lg n$$

در نهایت با استفاده از وضعیت ابتدایی $T(1)=1$ و یک وضعیت کلی $T(2)$ ، مقادیر c_1 ، c_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$T(1)=1 \Rightarrow T(1)=c_1+\underbrace{c_2\times \lg 1}_{0} \Rightarrow c_1=1$$

$$T(2)=T(\tfrac{n}{2})+1=1+1=2 \Rightarrow T(2)=c_1+c_2\times \lg 2=c_1+c_2=2$$

$$\Rightarrow c_2=1$$

جواب نهایی :
$$T(n)=1+\lg n$$

مثال:

$$\begin{cases} T(n)=7T(\frac{n}{2})+18(\frac{n}{2})^2 & n \text{ توانی از } 2 ،\ n>1 \\ T(1)=0 \end{cases}$$

با جایگزینی 2^k به جای n و قرار دادن $t_k=T(2^k)$ خواهیم داشت:

$$t_k=7t_{k-1}+18(2^{k-1})^2$$
$$=7t_{k-1}+18(4^{k-1})=7t_{k-1}+4^k(\tfrac{18}{4})$$

با استفاده از قضیه ، خواهیم داشت:

$$t_k=c_1 7^k+c_2 4^k$$

برای تعیین جواب عمومی مانند قبل داریم:

$$t_k=T(2^k) \Rightarrow T(2^k)=c_1 7^k+c_2 4^k$$
$$n=2^k \Rightarrow T(n)=c_1 7^{\lg n}+c_2 4^{\lg n}=c_1 n^{\lg 7}+c_2 n^{\lg 4}=c_1 n^{\lg 7}+c_2 n^2$$

و برای تعیین جواب نهایی از شرط ابتدایی $T(1)=0$ ، $T(2)$ استفاده می‌شود:

$$T(n)=4n^{\lg 7}-4n^2$$

$$(x^{\log_a y}=y^{\log_a x})$$

Subject :   Date

* حل معادلات بازگشتی با استفاده از جایگزینی

در صورتی که نتوان از روش‌های بیان شده استفاده کرد، می‌توان از این روش استفاده کرد. لازم به ذکر است این روش همیشه قابل استفاده نیست و گاهی به حل ساده‌ای نیاز دارد

مثال

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + n & n > 1 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ t_{n-1} &= t_{n-2} + n - 1 \\ t_{n-2} &= t_{n-3} + n - 2 \\ &\vdots \\ t_2 &= t_1 + 2 \\ t_1 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

t_n بدست $\Longrightarrow$ آمد با جایگزینی پشت سرهم

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n = t_{n-2} + n - 1 + n \\ &= t_{n-3} + n - 2 + n - 1 + n \\ &\vdots \\ &= t_1 + 2 + \dots + n - 2 + n - 1 + n \\ &= 1 + 2 + \dots + n - 2 + n - 1 + n \\ &= \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

مثال

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + \frac{2}{n} & , n > 1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + \frac{2}{n} \\ t_{n-1} &= t_{n-2} + \frac{2}{n-1} \\ t_{n-2} &= t_{n-3} + \frac{2}{n-2} \\ &\vdots \\ t_2 &= t_1 + \frac{2}{2} \\ t_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + \frac{2}{n} \\ &= t_{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\ &= t_{n-3} + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\ &\vdots \\ &= t_1 + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\ &= 0 + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} \\ &= 2 \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \approx 2 \ln n \end{aligned}$$

در فصل ۱ ثابت می‌شود

Subject : Date

* مبحث تکمیلی

در برخی از الگوریتم های بازگشتی، اگر n توانی از b (که b یک عدد ثابت مثبت است) باشد، آنگاه می‌توان پیچیدگی زمانی آن الگوریتم را تعیین کرد.

در اغلب الگوریتم های بازگشتی تقسیم و غلبه، b=2 می باشد. به نتایج به دست آمده برای توان های n بر پایه b را می توان به طور نوعی برای n در حالت کلی نیز قرار داد.

مثال ↓

مثال: اگر داشته باشیم $T(n) = 2n \lg n$ (n توانی از ۲ است: $b=2$)

می توان برای n در حالت کلی نوشت:

$$T(n) \in \Theta(n \lg n)$$

تعریف: تابع پیچیدگی $f(n)$ یک تابع غیرنزولی است اگر به ازای تمامی مقادیر n بعد از یک نقطه مشخص، با افزایش مقدار n، تابع سیر غیرنزولی داشته باشد:

$$n_1 > n_2 > N \Rightarrow f(n_1) \geq f(n_2)$$

قضیه: اگر $T(n)$ یک تابع پیچیدگی غیرنزولی باشد و به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{cases} T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + Cn^k \\ T(1) = d \end{cases}$$

n توانی از b است، $n>1$

با این شرایط:

$b \geq 2$، عدد صحیح $k \geq 0$، $a>0$، $c>0$، $d \geq 0$

آنگاه می توان گفت:

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & a < b^k \\ \Theta(n^k \lg n) & a = b^k \\ \Theta(n^{\lg_b^a}) & a > b^k \end{cases}$$

©MICRO®

Subject :   Date

مثال:

$$\begin{cases} T(n) = 8T(n/4) + 5n^2 & n>1 \text{ ، } n \text{ توانی از ۴ است} \\ T(1) = 3 \end{cases}$$

$a = 8,\ b = 4,\ c = 5,\ k = 2,\ d = 3$

$a = 8 < b^k = 16 \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^k) = \Theta(n^2)$

تمرینات

B-1 ۱، ۳، ۴، ۶، ۷

B-2 ۱۰، ۱۱، ۱۳

B-3، B-4 ۱۴،