فصل پنجم
رهیافت شاخه و حد
Branch and Bound

روش‌های مختلف حل مسئله کوله‌پشتی

۱. روش حریصانه، برای حل مسئله کوله‌پشتی با شکست مواجه شد. البته با این روش می‌توان برای مسئله کوله پشتی جزیی به جواب رسید.

۲. روش‌های برنامه‌نویسی پویا و عقبگرد که پیچیدگی زمانی آن‌ها در بدترین حالت، نمایی است.

۳. روش شاخه و حد که اصلاح شده روش عقبگرد می‌باشد و آن را بررسی خواهیم کرد.

معرفی روش شاخه و حد

- این روش بسیار شبیه روش عقبگرد می‌باشد که از درخت فضای حالت برای حل مسئله استفاده می‌کند با این تفاوت که در آن بر خلاف عقبگرد، درخت به‌صورت عمقی پیمایش نمی‌شود .
- این الگوریتم، در هر گره درخت **حدی** را محاسبه می‌کند تا مشخص شود آیا گره مذکور امیدبخش می‌باشد یا نه؟ اگر حد محاسبه شده از بهترین جوابی که تا کنون به دست آمده است بهتر نباشد پس آن گره، امیدبخش نیست.

معرفی روش شاخه و حد

- روش شاخه و حد همچنان در بدترین حالت، پیچیدگی زمانی نمایی دارد اما در مسائل با اندازه نمونه‌های خیلی بزرگ می‌تواند کارایی بالاتری داشته باشد زیرا قادر است بخش زیادی از فضا را هرس کند.
- این روش را تنها در مسائل بهینه‌سازی می‌توان به کار برد. در حالیکه عقبگرد قادر است دسته وسیع‌تری از مسائل را حل کند.

معرفی روش شاخه و حد

- مسئله کوله‌پشتی حل شده در فصل قبل با روش عقبگرد، برای تعیین امیدبخش بودن یک گره از مفهوم حد استفاده کرده است.
  - مقایسه مقدار حد (bound) با حداکثر سود مقدار جاری(maxprofit)
- آنچه در شاخه و حد اتفاق می‌افتد، فقط استفاده از مفهوم حد برای تعیین امیدبخش بودن یا نبودن گره نیست بلکه حدهای گره‌های امیدبخش با هم مقایسه شده و تنها آن گره‌ای بسط داده می‌شود که بالاترین حد را دارد.

معرفی روش شاخه و حد

- با مقایسه حد گره‌ها با هم و بسط گره‌ای با بالاترین حد، سرعت رسیدن به جواب بهینه بالا خواهد رفت .
- در این روش ما ملزم به ملاقات گره‌ها با ترتیب جستجوی عمقی نمی‌باشیم.
- **جستجوی اول-بهترین با هرس شاخه و حد** در این روش انجام خواهد شد.
- ابتدا **جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد** را بررسی می‌کنیم و از آن به عنوان پایه‌ای برای روش اول –بهترین استفاده خواهیم کرد.

معرفی روش شاخه و حد

- پیاده‌سازی جستجوی
  - عمقی: بازگشتی
  - سطحی: صف
  - اول-بهترین: صف الویت

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد

- مشخصات مسئله
  - W = 16
  - n= 4

i	p_i	w_i	$\frac{p_i}{w_i}$
1	\$40	2	\$20
2	\$30	5	\$6
3	\$50	10	\$5
4	\$10	5	\$2

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد

- یادآوری از روش عقبگرد
  - weight مجموع وزن و profit مجموع سود تا کنون.
  - در روش عقبگرد، آنقدر در یک شاخه پیش می‌رویم تا وزن گره از W بیشتر شود (گره k).

$$totweight = weight + \sum_{j=i+1}^{k-1} w_j$$

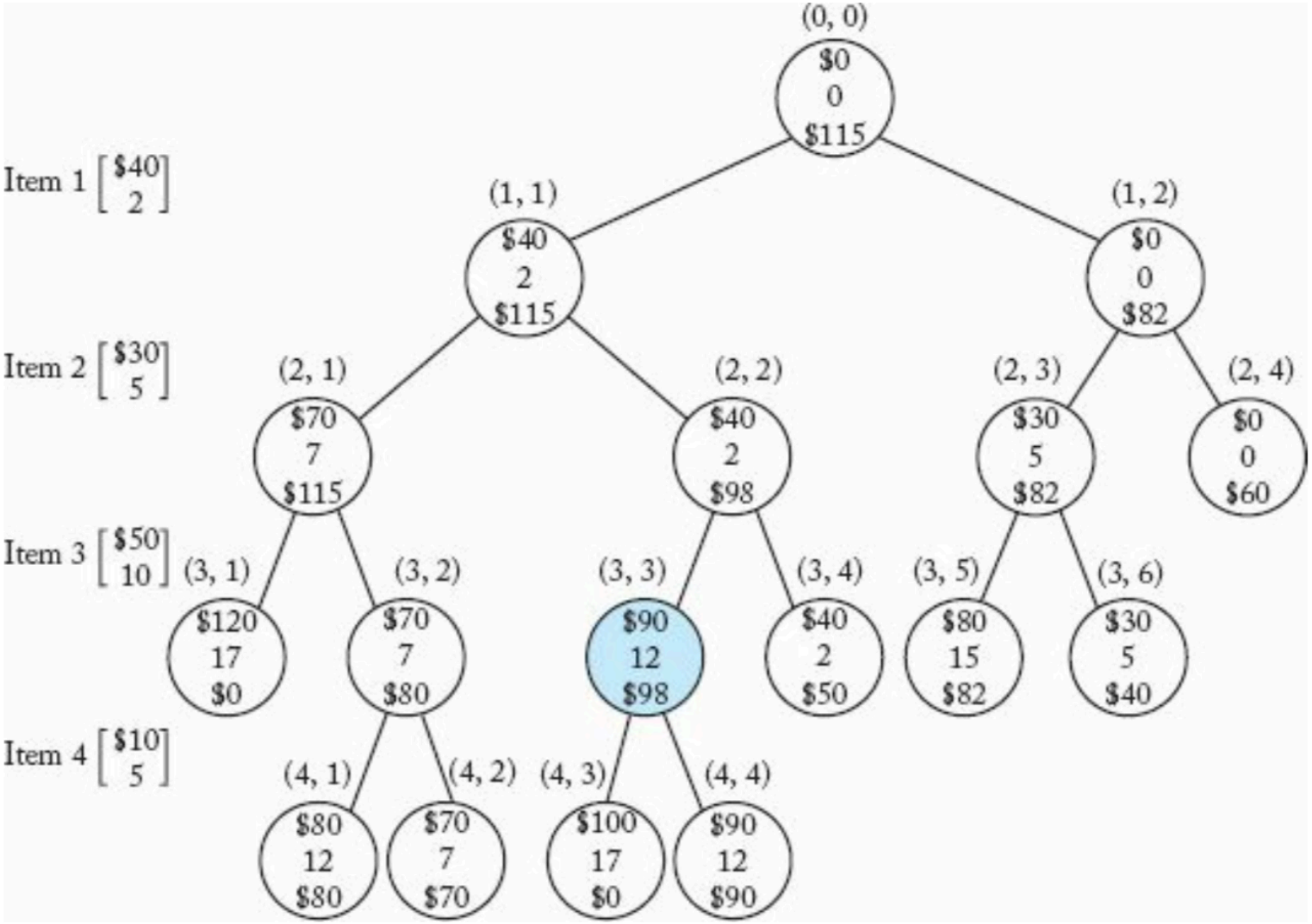
به این ترتیب حد را برای گره والد i تعیین می‌کنیم.

$$bound = \left(profit + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j \right) + (W - totweight) \times \frac{p_k}{w_k}.$$

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد

- یادآوری از روش عقبگرد
  - یک گره در صورتی غیرامیدبخش است که حد محاسبه شده برای آن از بهترین جواب به دست آمده تا کنون (از گره‌های بسط داده شده) که آن را با maxprofit نشان می‌دهیم)، بهتر نباشد .
  - همچنین هر گره‌ای که weight در آن از W بیشتر شده باشد غیرامیدبخش است.

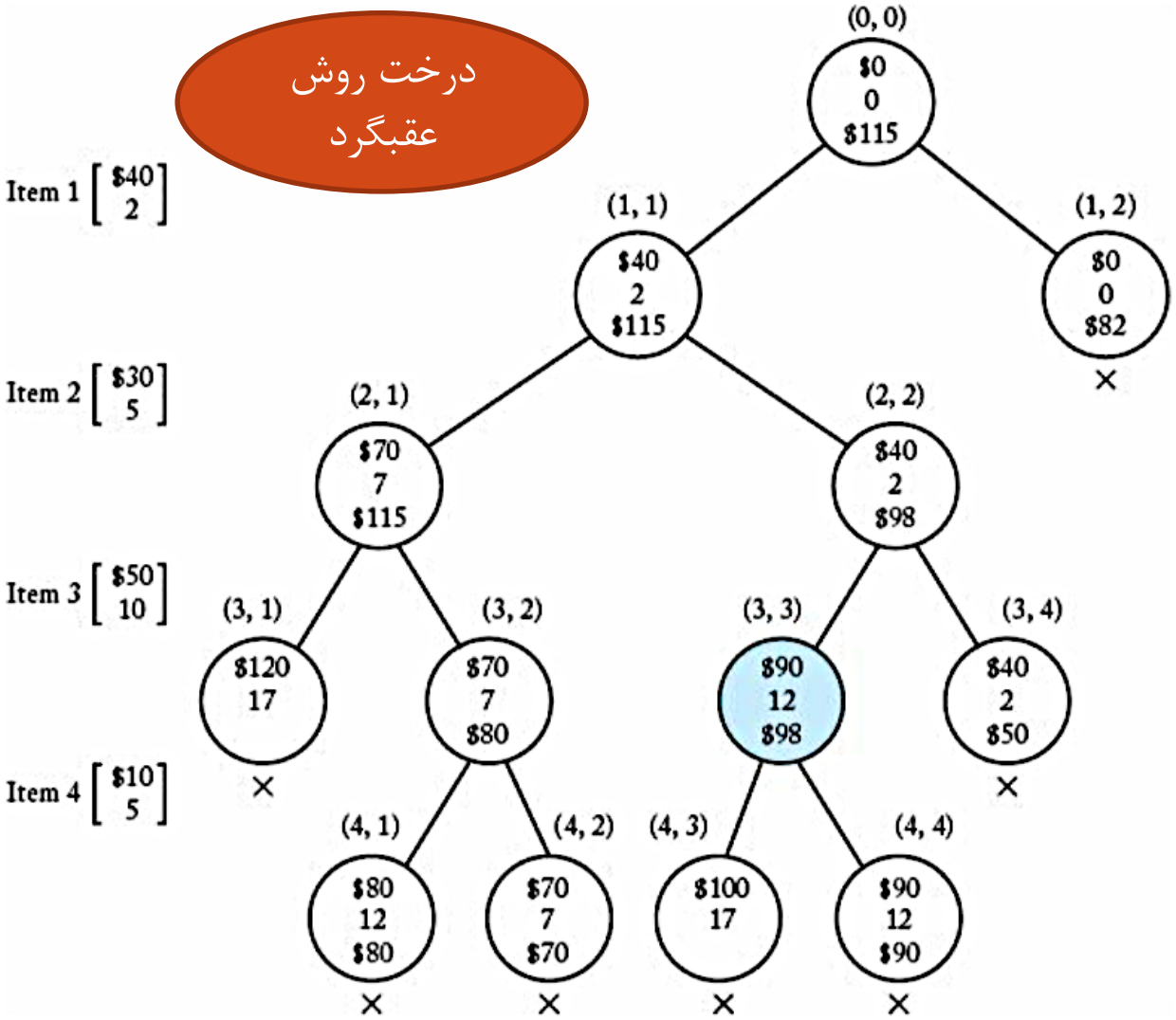
حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد



-profit
-weight
-bound

-در گره‌های (۳,۱) و (۴,۳) حد صفر شده است. در این گره‌ها وزن از W بیشتر شده در نتیجه حد آن با صفر مقداردهی می‌شود.

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد



- گره (۱,۲)در روش عقبگرد غیرامیدبخش تشخیص داده شده بود اما در روش شاخه و حد بسط داده می‌شود .
- این گره سومین گره‌ای است که بسط داده می‌شود و حد آن که ۸۲ دلار است از بیشترین سود کسب شده، ۴۰ دلار، بیشتر است .
- بنابراین عقبگرد عملکرد بهتری در رابطه با این گره دارد.

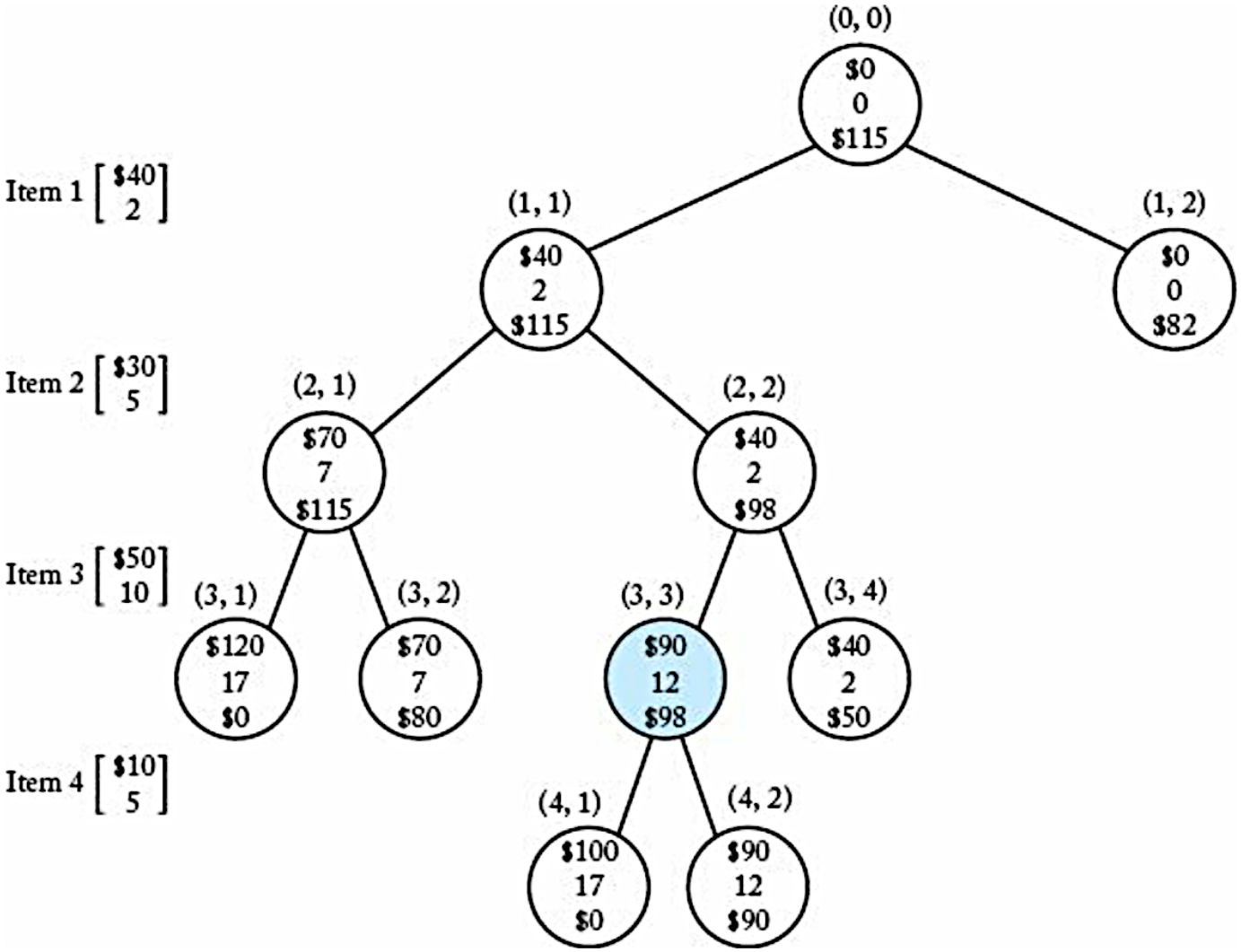
حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی سطحی با هرس شاخه و حد

- در روش سطحی، اینکه آیا گره های یک فرزند مورد بررسی قرار خواهند گرفت یا نه به زمان بررسی شدن آن گره بستگی دارد.
- برای مثال فرزندان گره (۲,۳) برای بررسی شدن انتخاب می‌شوند زیرا در زمان بررسی آن، maxprofit=70 بود که از حد این گره، یعنی ۸۲کمتر است. اما زمانیکه فرزندان آن بررسی می‌شوند maxprofit=90 است که از حد کمتر بوده و باعث می‌شود وقتمان در بررسی این گره تلف شود.

معرفی روش جستجوی اول-بهترین با هرس شاخه و حد

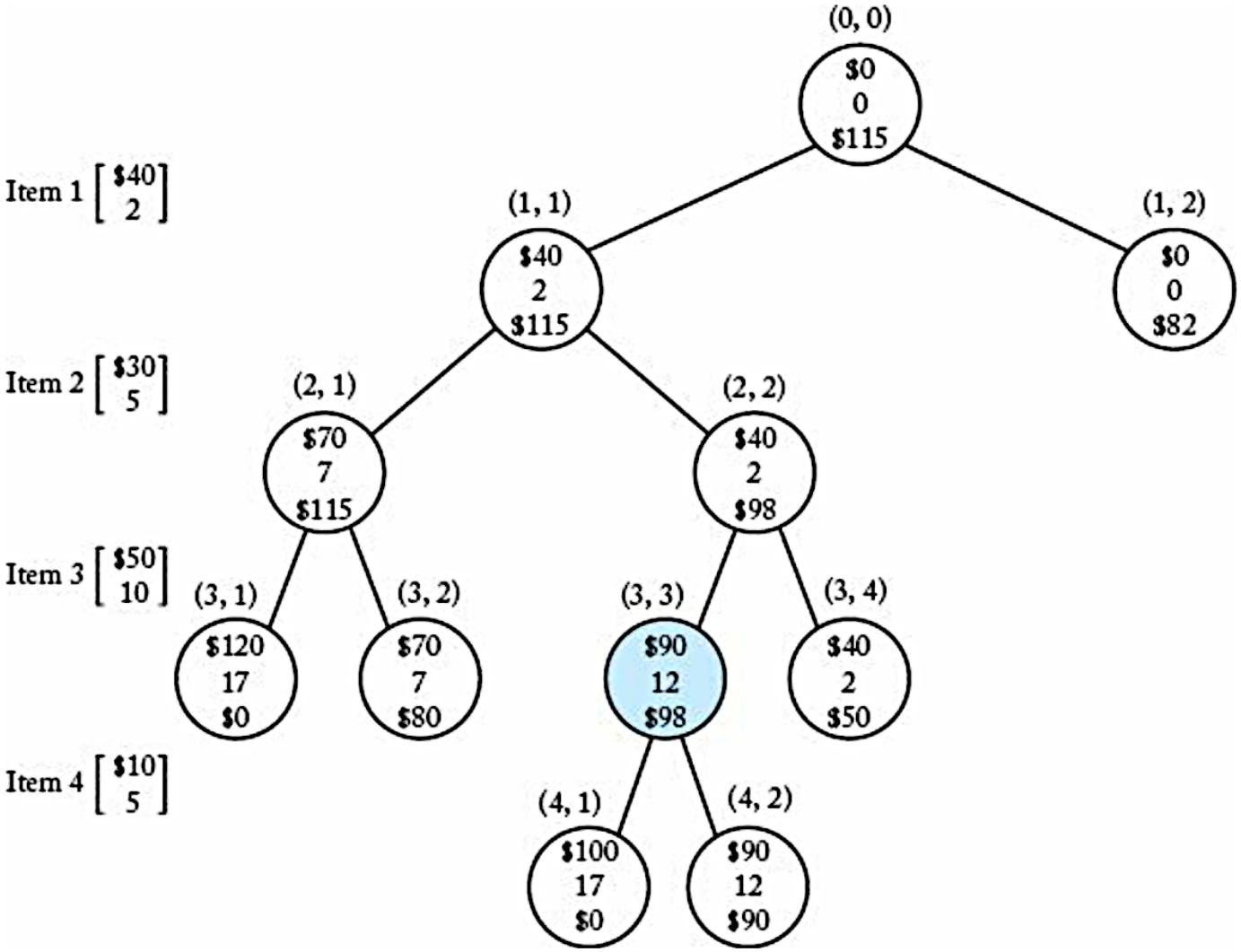
- جستجوی سطحی هیچ مزیتی نسبت به جستجوی عمقی ندارد .
- در اول بهترین، از مقدار حد علاوه بر امیدبخش بودن یا نبودن یک گره، برای هرس درخت نیز استفاده می‌کنیم.
- برای این منظور پس از بررسی فرزندان یک گره، از بین گره‌های امیدبخش بررسی نشده، گره‌ای با بیشترین مقدار حد را برای بررسی انتخاب می‌کنیم.
- درخت هرس شده با روش اول-بهترین، با سرعت بیشتری به جواب خواهد رسید.

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی اول-بهترین با هرس شاخه و حد



1.	(0,0)	maxprofit = 0
2.	(1,1)	maxprofit = 40
3.	(1,2)	
4.	(1,1)	won to be expanded!
5.	(2,1)	maxprofit = 70
6.	(2,2)	
7.	(2,1)	won to be expanded!
8.	(3,1)	nonpromising

حل یک مسئله کوله‌پشتی با جستجوی اول-بهترین با هرس شاخه و حد



9.	(3,2)	
10.	(2,2)	won to be expanded!
11.	(3,3)	maxprofit = 90, makes (1,2) and (3,2) non-promising
12.	(3,4)	nonpromising
13.	(3,3)	won to be expanded!
14.	(4,1)	nonpromising
15.	(4,2)	nonpromising

مقایسه سه روش در حل مسئله کوله‌پشتی بررسی شده

- تعداد گره‌های بررسی شده در روش اول-بهترین به ترتیب ۶ و ۲ گره کمتر از روش‌های سطحی و عقبگرد می‌باشد.
- در مسائلی با درخت فضای حالت بزرگ، کم شدن تعداد گره‌ها بیار ارزشمند بوده باعث می‌شود روش اول-بهترین جواب را با سرعت بالاتری پیدا کند.