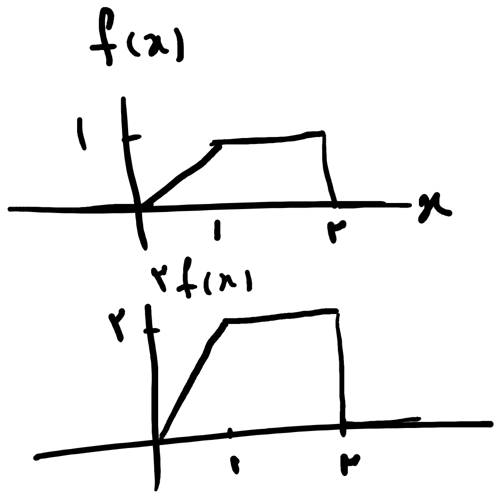
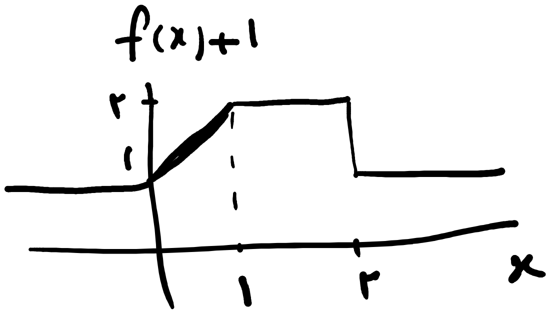
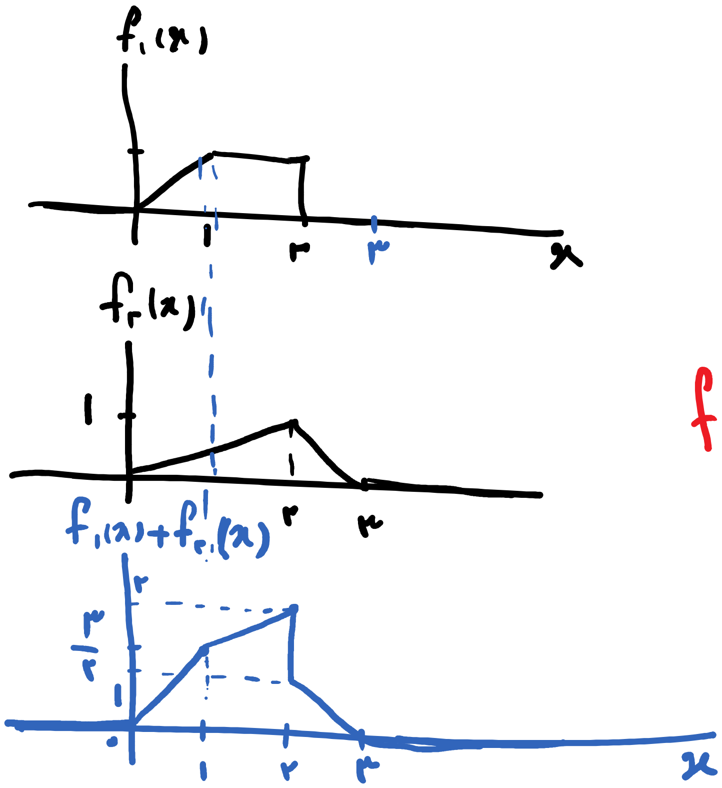
عملیات ریاضی روی تابع ریاضی :



۱- جمع یا ضرب در مقدار ثابت



۲- جمع دو تابع

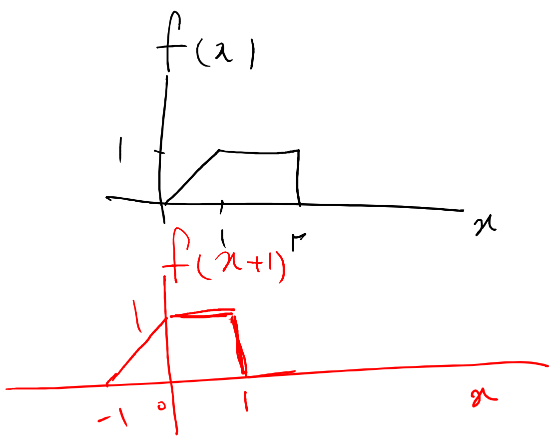


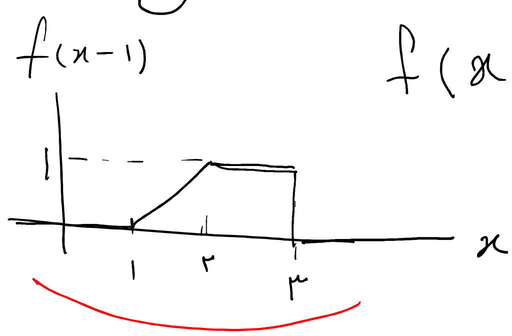
۳- ضرب دو تابع :

$$f_1(x).f_2(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x<0 \\ \frac{1}{2}x^2 & , \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{2}x & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad \cancel{2<x<3} \quad x>2 \end{cases}$$

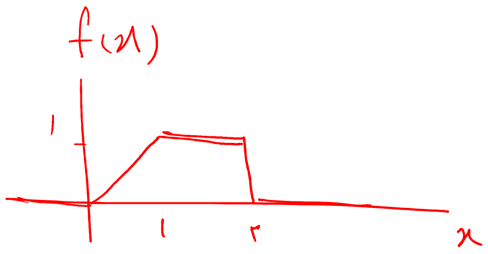
دسته دوم : عملیات روی متغیر مستقل

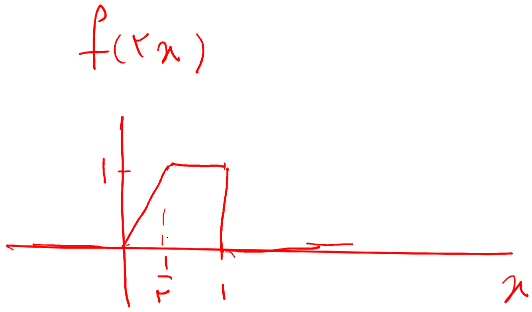
۱- $f(x-a)$

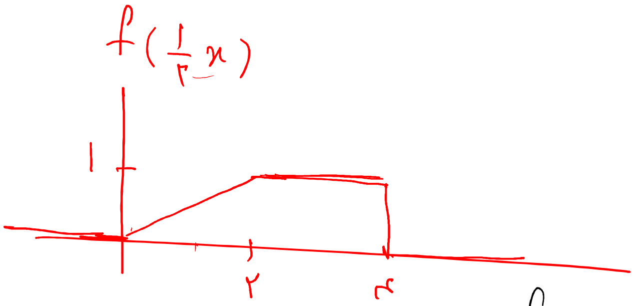


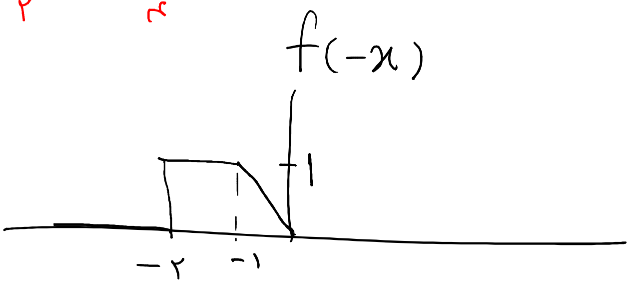


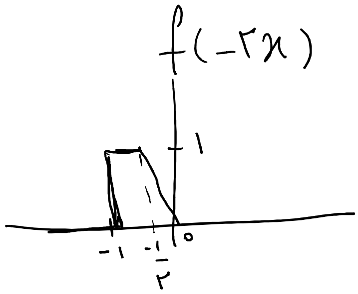
۲- $f(ax)$











مثال:

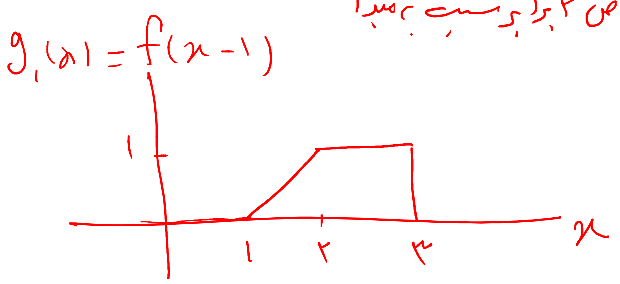
$g(x) = f(2x-1)$

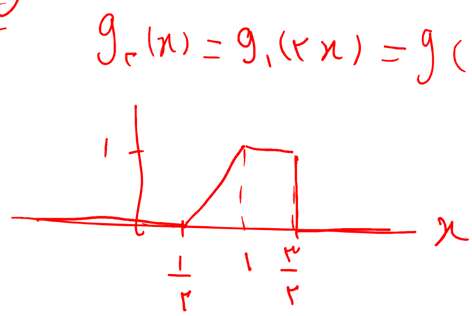
① شیفت یک واحد به راست

1) $g_1(x) = f(x-1)$

2) $g_2(x) = g_1(2x) = f(2x-1) = g(x)$

② انقباض ۲ برابر نسبت به مبدا

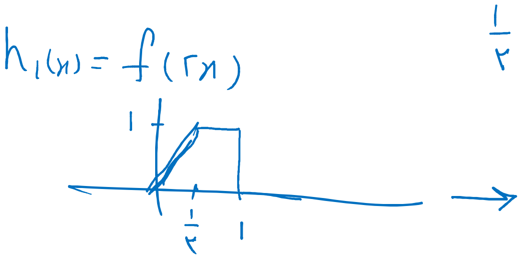


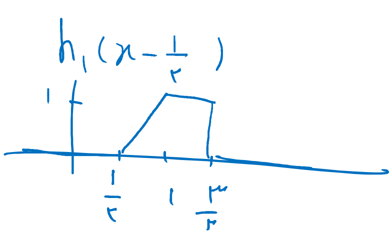


$h_1(x) = f(2x)$ ① انقباض ۲ برابر

$g(x) = h_1(x-\frac{1}{2}) = f(2(x-\frac{1}{2})) = f(2x-1) = g(x)$

② شیفت به راست به میزان $\frac{1}{2}$





درس سیگنال- جلسه دوم: مفهوم سیگنال؛ پیوسته و گسسته؛ یک‌بعدی و دوبعدی؛ سیگنالهای مهم پیوسته

۱- **سیگنال**:

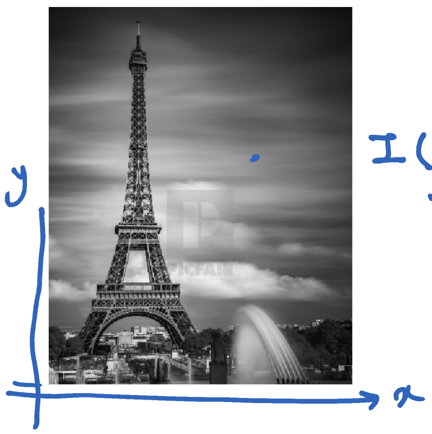
سیگنال، یک تابع (متغیر وابسته) از یک یا چند متغیر مستقل است که روند تغییرات آن حاوی اطلاعاتی در مورد یک پدیده فیزیکی است.

مثل تغییرات دمای اتاق در طول شبانه‌روز، تغییرات فشار بر حسب ارتفاع از سطح زمین، تغییرات سرعت خودرو بر حسب میزان نیروی اعمالی به پدال گاز، تغییرات جریان یک میکروفون در طول زمان، تغییرات روشنایی در یک عکس سیاه وسفید در نقاط مختلف عکس و ......

سیگنال می‌تواند یک بعدی یا چند بعدی باشد.

یک متغیر مستقل ← چند متغیر مستقل

متغیر مستقل: زمان (t)



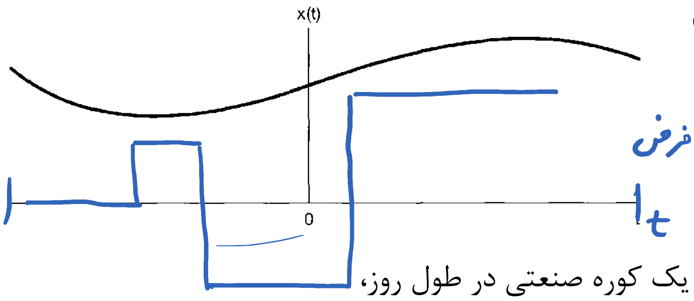
$I(x,y)$ ← سیگنال دوبعدی

دو دسته مهم سیگنال:

سیگنال‌های زمان پیوسته (continuous time signals)

متغیر مستقل یک کمیت پیوسته است

فرض $\begin{cases} t = t_0 \\ t = t_1 \end{cases}$: $t_0 < \forall t < t_1$



مثال: سیگنال خروجی میکروفون، سیگنال نوار قلب، دمای یک کوره صنعتی در طول روز،

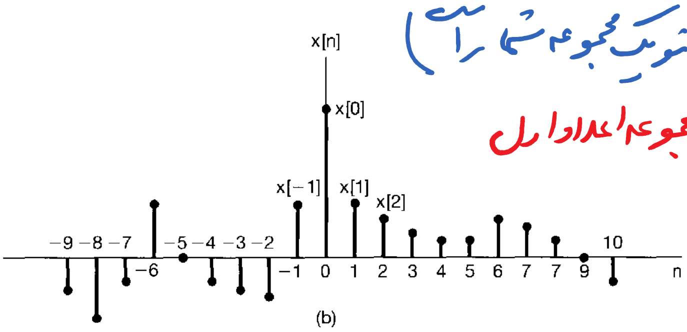
سیگنال‌های زمان گسسته (discrete time signals)

متغیر مستقل کمیت گسسته است (متغیر مستقل عضو یک مجموعه شمارا)

$x[n]$ ← عدد صحیح

مجموعه اعداد اول = {۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ...}

N = {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...}



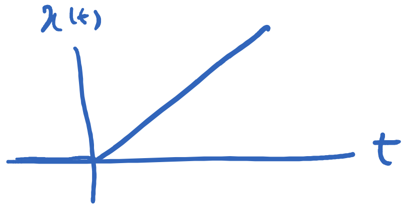
مثل: موجودی بانک در انتهای روز کاری، معدل دانشجویان بر حسب کلاس، تصویر دیجیتال

۲- سیگنال‌های پیوسته مهم:

۱- پله واحد

$$u(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

مثال: $x(t)=\underbrace{t\,u(t)}_{\text{شیب واحد}}=\begin{cases}t, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$



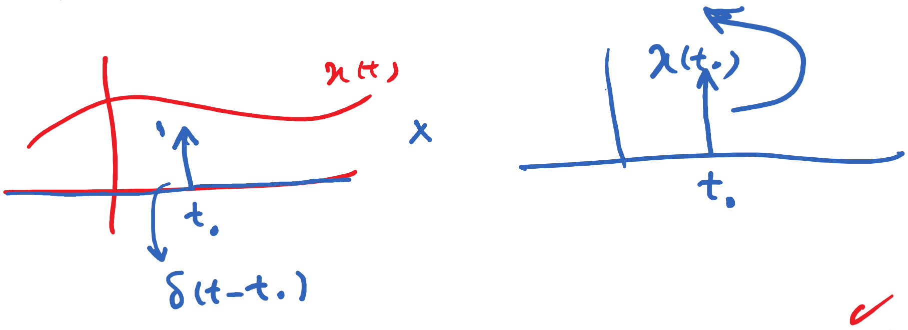
۲- ضربه واحد (impulse)

$$\delta(t)\triangleq\frac{d}{dt}u(t)\iff \underline{u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau}$$

$$\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1\end{cases}\Rightarrow\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\,dt=1$$

برخی خواص ضربه:

1) $x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$



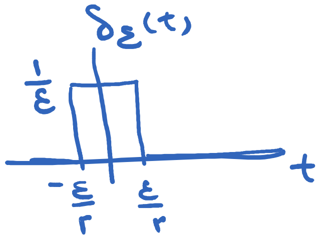
۲) $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$ غربال‌گری (sifting)

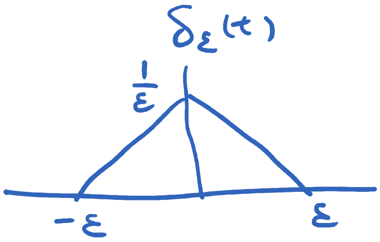
۳) $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)\Rightarrow\delta(-t)=\delta(t)$ سیگنال زوج

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(at)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a}\delta(\tau)\,d\tau=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)\,d\tau=\frac{1}{a} \quad (a>0)\\ \delta(at)=0, \quad t\neq 0\end{cases}$$

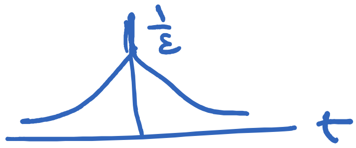
۴- تابع حدی ضربه

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$



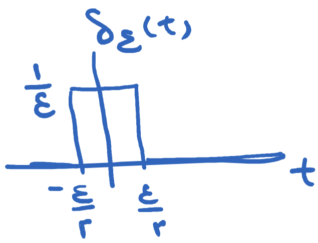


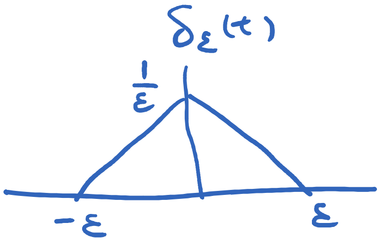
$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|t|/\varepsilon}$$



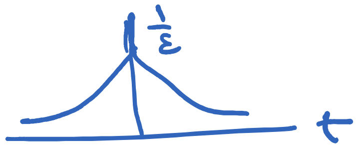
۴- تابع ضربه

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \delta(t)$$



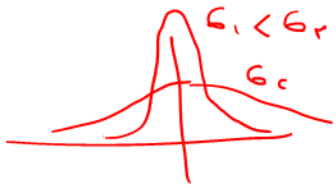


$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-|t|/\varepsilon}$$



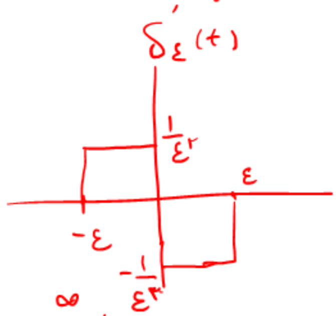
$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

$\sigma = \varepsilon$



$$\delta'(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dt} \delta_\varepsilon(t)$$

$\delta'_\varepsilon(t)$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,dt = 0$$

مثال.

$$x(t)\,\delta'(t-t_0) = ?$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\underbrace{x'(t)\,\delta(t-t_0)}_{x'(t_0)\delta(t-t_0)} + x(t)\,\delta'(t-t_0) = x(t_0)\,\delta'(t-t_0)$$

$$x'(t_0)\,\delta(t-t_0) + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow x(t)\,\delta'(t-t_0) = x(t_0)\,\delta'(t-t_0) - x'(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta'(t-t_0)\,dt = \cancel{\int x(t_0)\,\delta'(t-t_0)\,dt}^{\,0} - \int x'(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt$$

$$= -x'(t_0)$$

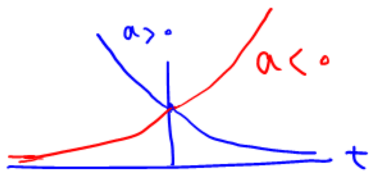
۳- سیگنال نمایی

$$x(t) = e^{st}$$ (s یک عدد مختلط است)

$$s = \underset{\downarrow}{a} + i\underset{\downarrow}{b} = a + jb \quad , \; j = i = \sqrt{-1}$$

$a = \mathrm{Re}(s)$, $b = \mathrm{Im}(s)$

$$s = r e^{j\theta} \quad \begin{cases} r = |s| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arg(s) = \arctan\frac{b}{a} \end{cases}$$



s حقیقی باشد : $x(t) = e^{at}$

s موهومی خالص : $x(t) = e^{jbt} = \cos bt + j \sin bt$

$x(t)$ متناوب است

$$\exists T>0, \forall t: x(t+T)=x(t) \Rightarrow e^{jb(t+T)} = e^{jbt}$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{jbt}} e^{jbT} = \cancel{e^{jbt}} \Rightarrow e^{jbT} = 1 = e^{j2k\pi} \Rightarrow bT = 2k\pi$$

$k=0, \pm1, \pm2, \dots$

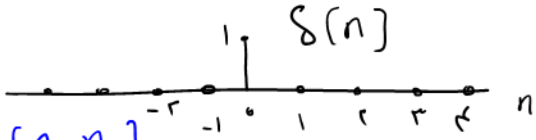
$$\Rightarrow T = \frac{2k\pi}{b} = \frac{2\pi}{b}$$

$$s = a+jb : x(t) = e^{st} = e^{at} \cdot e^{jbt}$$

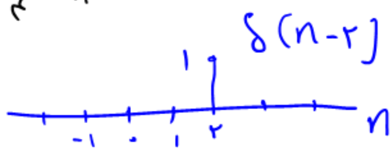
۳- سیگنالهای گسسته‌ زمان

۱- ضربه (نمونه) $x[n]=\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

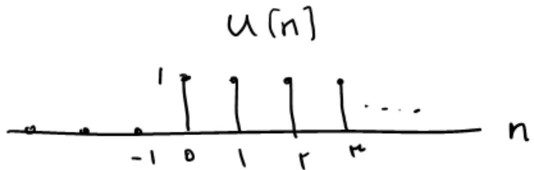


1) $x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$



۲- پله $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n=0,1,2,\dots \\ 0, & n=-1,-2,\dots \end{cases}$$



2) $u[n]-u[n-1]=\delta[n]$

3) $\sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] = u[n]$

اثبات:

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(\underbrace{n-k}_{m}) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$$

$u[n]-u[n-1] = \delta[n]$

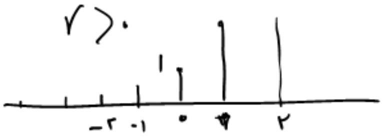
4) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$

۳- سیگنال نمایی $x[n] = z^n$ که z مقدار مختلط است

$$z = re^{j\theta} : x[n] = r^n e^{jn\theta}$$

اگر $\theta = 0$ یا $\theta = 2k\pi$: $x(n) = r^n$

سیگنالهای حقیقی



اگر $r=1$: $x(n) = e^{jn\theta}$

$= \cos n\theta + j\sin n\theta$

آیا سیگنال $x(n)$ فوق متناوب است؟

$\exists N>0, \forall n: \; x(n+N) = x(n)$

$$e^{j(n+N)\theta} = e^{jn\theta} \Rightarrow e^{jN\theta} = 1 = e^{j2k\pi} \Rightarrow N\theta = 2k\pi$$

$$\Rightarrow N = \frac{2k\pi}{\theta} \; ? \; \Leftrightarrow \theta = \frac{k}{N}(2\pi) \Leftrightarrow$$ θ مضرب گویای 2π باشد

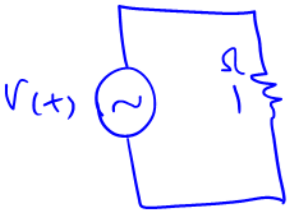
∴ سیگنال $x(n) = e^{j\theta n}$ وقتی متناوب است که θ مضرب گویای 2π باشد

مثال- $x(n) = e^{j\frac{\pi}{10}n}$ متناوب است (زیرا $\frac{\pi}{10} = \frac{1}{20}(2\pi)$)

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20k \Rightarrow \boxed{N = 20}$$

مثال- $x(n) = e^{j2n}$ متناوب نیست زیرا $2 \neq \left(\frac{k}{N}\right)(2\pi)$.

- توان و انرژی



$p(t) = v^2(t)$ توان لحظه‌ای

لذا

توان لحظه‌ای سیگنال $p(t) = |x(t)|^2$

انرژی سیگنال $E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

توان متوسط $P_{av} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$

دسته‌بندی سیگنال برحسب توان و انرژی

۱ـ سیگنال انرژی $E < \infty$

در اینصورت $P_{av} = 0$

مثال: $x(t) = e^{-at} u(t) \; , \; a > 0$

$$E(t) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left| e^{-at} u(t) \right|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \int_{0}^{T} e^{-2at} dt = -\frac{1}{2a} e^{-2at} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2a}$$

۲ـ سیگنال توان: $0 < P_{av} < \infty$ (در اینجا $E \to \infty$)

مثال. $x(t) = A e^{j\omega t}$ (سیگنال متناوب با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega}$ است)

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| A e^{j\omega t} \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 dt = A^2$$

ـ تمرین: $x(t) = u(t)$ ، $x(t)$ سیگنال توان یا انرژی است؟

۳ـ سیگنال نه توان نه انرژی

$P_{av} \to \infty$

مثال. $x(t) = e^{-t}$

جلسه چهارم - سیستم و خواص آن

سیستم: مبدل سیگنال

ورودی $x(t)$ / $x[n]$ → سیستم → $y(t)$ / $y[n]$ خروجی

سیستم ↓ مجموعه‌ای از عملیات ریاضی (جبری و منطقی)

مثال. هواپیما (فرمان‌های خلبان ← مسیر و سرعت)

مقاومت الکتریکی (ولتاژ دو سر ← توان گرمایی)

لامپ روشنایی (وضعیت کلید ← شدت نور)

مدار RC سری (ولتاژ ← جریان الکتریکی)

توصیف ریاضی: $y(t) = \underset{\text{تبدیل}}{T}\{x(t)\}$

مثال.

$$y(t) = 2x(t)$$
$$y(t) = x(t-1)$$
$$y(t) = dx/dt$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n]$$
$$y[n] = x[n+2]$$
$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$$

$$y[n] = \max(x[n], x[n-1])$$
$$y[n] = \max(n, x[n])$$

$x(t)$ → AC/DC → $y(t) = |x(t)|$

خواص سیستم

۱- بدون حافظه / با حافظه

بدون حافظه: سیستمی که در آن خروجی در هر لحظه زمانی تنها به ورودی همان لحظه بستگی داشته باشد: مثال

$$y(t) = x(t) + 2$$
$$y(t) = x^2(t)$$
$$y[n] = (n+1)x[n]$$
$$y[n] = \max(n, x[n])$$

مثال از سیستم با حافظه

$$y(t) = x(t-1)$$

$$y(t) = x(2t)$$

$$y(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

$$y(n) = \max\big(x(n), x(n-1)\big)$$

$$y(n) = \frac{1}{1+|x(0)|}\, x(n)$$

۲- علّی / غیرعلّی
(سببی) (غیرسببی)

علّی: خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات آینده بستگی ندارد.

$$y(t) = 3x(t) + 1$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = (t+1)\, x(t-1)$$

$$y(n) = \max\big(x(n), x(n-1)\big)$$

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

غیرعلّی:

$$y(t) = x(2t)$$

$$y(t) = x\left(\tfrac{1}{2}t\right)$$

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

$$y(n) = x(n+1)$$

$$y(n) = \sum_{m=-5}^{5} x(n-m)$$

$$y(n) = \frac{1}{1+|x(0)|}\, x(n)$$

۳- خطی / غیرخطی

سیستمی خطی است که دو ویژگی زیر را دارا باشد:

۱. همگنی: $y(t) = T\{x(t)\} \Longrightarrow \alpha y(t) = T\{\alpha x(t)\}$

۲) جمع‌پذیری

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= T\{x_1(t)\} \\ y_2(t) &= T\{x_2(t)\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1(t)+y_2(t) = T\{x_1(t)+x_2(t)\}$$

همگنی

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow y(t)$$
$$\alpha x(t) \longrightarrow \alpha y(t)$$

جمع‌پذیری

$$x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow y_1(t)$$
$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$
$$x_1(t)+x_2(t) \longrightarrow y_1(t)+y_2(t)$$

خطی

یا معادلا سیستمی خطی است که خاصیت جمع آثار در آن برقرار باشد

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &\longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) &\longrightarrow y_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Big(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t) \longrightarrow \alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t)\Big)$$

مثال از سیستم خطی:

1) $y(t) = 2x(t)$

اثبات: فرض

$$y_1(t) = 2x_1(t)$$
$$y_2(t) = 2x_2(t)$$

تعریف کنید: $x(t) = \alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)$

$$\Rightarrow y(t) = 2x(t) = 2\big(\alpha_1 x_1(t)+\alpha_2 x_2(t)\big)$$
$$= \alpha_1\big(2x_1(t)\big)+\alpha_2\big(2x_2(t)\big)$$
$$= \alpha_1 y_1(t)+\alpha_2 y_2(t) \Rightarrow \text{سیستم خطی است}$$

2) $y(t) = x(t-2)$

3) $y(t) = x(2t)$

4) $y(t) = \dfrac{dx}{dt}$

5) $y(t) = \displaystyle\int_{t-t_1}^{t+t_2} x(\tau)\,d\tau$

6) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

7) $y[n] = (n+1)^3\, x[n]$

8) $y[n] = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

9) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 2x[n], & n < 1 \end{cases}$

$$y(t) = x(t) + 1$$

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = |x(t)|$$

غیرخطی

$$y(n) = \max(x(n), x(n-1))$$

$$y(n) = \frac{1}{1+|x(0)|}\, x(n)$$

$$y(n) = |x(0)| \cdot x(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & x(n) \geq 1 \\ 2x(n), & x(n) < 1 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1(n) = 1 \longrightarrow y_1(n) = 1 \\ x_2(n) = 0.1 \quad x_1(n) = 0.1 \longrightarrow y_1(n) = 0.2 \end{array} \right.$$

خاصیت همگنی برقرار نیست.

قضیه: در یک سیستم خطی، به ازای ورودی صفر، خروجی صفر خواهد بود.

$$x(n) = 0 \longrightarrow y(n) = 0$$

$$x(t) = 0 \longrightarrow y(t) = 0$$

قضیه: یک سیستم خطی، علی است اگر و تنها اگر:

$$\forall t_0 \left(\forall t < t_0 : x(t) = 0 \longrightarrow y(t) = 0,\ t < t_0 \right)$$

۴- تغییرناپذیری با زمان

(Time Invariant)

رفتار (قانون) سیستم در طول زمان تغییر نکند

$$[x(t) \longrightarrow y(t)] \Rightarrow [x(t-T) \longrightarrow y(t-T)]$$: Shifted input → Shifted out

مثال از سیستم تغییرناپذیر با زمان

۱) $y(t) = ۲x(t-۱) + ۳$

۲) $y(t) = dx/dt$

۳) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

۴) $y(t) = |x(t)|^۲$

۵) $y[n] = x[n] - x[n-1]$

۶) $y[n] = \max(x[n], x[n-1])$

۷) $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

۸) $y[n] = \begin{cases} x[n], & x[n] \geq 1 \\ \frac{1}{1+|x[n]|}, & x[n] < 1 \end{cases}$

مثال از سیستم تغییرپذیر با زمان

۱) $y(t) = x(۲t)$

۲) $y(t) = t\,x(t)$

۳) $y(t) = \int_{۰}^{t} x(\tau)d\tau$

۴) $y(t) = x(t^۲)$

۵) $y[n] = (\sin \frac{\pi}{۱۰} n)\, x[n]$

۶) $y[n] = \max(x[n], n)$

۷) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ \frac{1}{1+|x[n]|}, & n < 1 \end{cases}$

اثبات تغییرناپذیری با زمان $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

$$x_1(t) = x(t-T) \;:\; y_1(t) = \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - T)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{t-T} x(s)\,ds = y(t-T)$$

- اثبات تغییرپذیری با زمان $y(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$

$$x_1(t)=x(t-T)\ :\ y_1(t)=\int_0^t x_1(\tau)d\tau=\int_0^t x(\tau-T)d\tau$$

$$=\int_{-T}^{t-T} x(s)ds \neq y(t-T)=\int_0^{t-T} x(\tau)d\tau$$

- نشان دادن تغییرپذیری با زمان $y(t)=x(2t)$:

$$x(t)=u(t)\ :\ y(t)=u(2t)=u(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(t)=u(t-1)\ :\ y_1(t)=x_1(2t)=u(2t-1)&=u(t-\tfrac{1}{2})\\ y(t-1)&=u(t-1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow TV$$

۵ - پایداری

BIBO

Bounded Input Bounded Output

سیستم پایدار، سیستمی است که به ازای هر ورودی کراندار، خروجی کراندار باشد.

$$\forall\ |x(t)|<M\ :\ |y(t)|<\infty$$

مثال از سیستم پایدار:

۱) $y(t)=3x(t-2)+1$

۲) $y(t)=x(t^2)$

۳) $y(t)=\int_{t-5}^{t+5} x(\tau)d\tau$

۴) $y(n)=\max\left(x(n),x(n-1)\right)$

۵) $y[n]=x[n]-x[n-1]$

۶) $y[n]=\begin{cases} x[n], & n\geq 1\\ 2x[-n], & n<1\end{cases}$

مثال از سیستم ناپایدار:

۱) $y(t)=t\,x(t)$

۲) $y(t)=\frac{dx}{dt}$

۳) $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

۴) $y[n]=\max\left(n,x[n]\right)$

۵) $y(n)=\begin{cases} \frac{1}{1+x(0)}x(n), & x(0)\neq -1\\ -1, & x(0)=-1\end{cases}$

۶- معکوس پذیری

فرض
$$\begin{cases} x_1(t) \longrightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \longrightarrow y_2(t) \end{cases}$$

$$[\,x_1(t) \neq x_2(t) \Rightarrow y_1(t) \neq y_2(t)\,]$$

ورودی‌های متمایز، خروجی‌های متمایز ایجاد کنند.

$$[\,y_1(t) = y_2(t) \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)\,]$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \xrightarrow{y(t)} \boxed{\text{سیستم معکوس}} \xrightarrow{x(t)}$$

مثال- سیستم $y(t) = x(2t)$ معکوس پذیر است؟

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t) = x_1(2t) \\ y_2(t) = x_2(2t) \\ y_1(t) = y_2(t) \end{array}\right| \Rightarrow x_1(2t) = x_2(2t)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$$: معکوس پذیر

سیستم اولیه
$$x(t) = y\left(\tfrac{1}{2}t\right) \Rightarrow y(t) = x\left(\tfrac{1}{2}t\right)$$
سیستم معکوس:

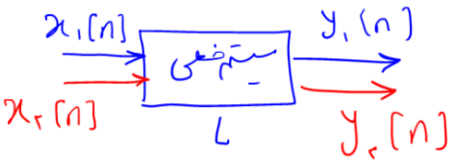
مثال ۲- $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$ معکوس پذیر است؟ معکوس را بصورت

$$y[n] = x[n] + \sum_{m=-\infty}^{n-1} x[m] = x[n] + y[n-1]$$
وجود باشد.

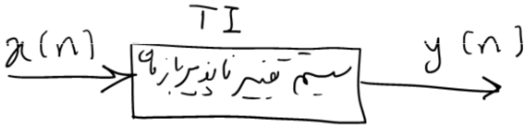
$$\Rightarrow x[n] = y[n] - y[n-1] \xrightarrow{\text{معکوس}} y[n] = x[n] - x[n-1]$$
سیستم معکوس

فصل ۲- سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۱. مقدمه
- خطی بودن
- تغییرناپذیری با زمان



$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \longrightarrow \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$$



$$x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$$

LTI: Linear Time Invariant

خطی تغییرناپذیر با زمان

فصل ۲- سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۲. قابلیت تعمیم‌دهی در سیستم‌های LTI و ذکر یک مثال

مثال. $x_1[n] = u[n]$ ، $y_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

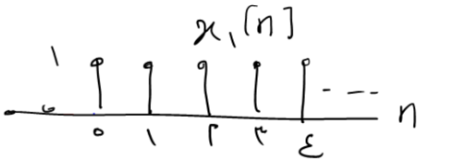
$x_2[n] = u[n-2]$ ، $y_2[n] = ?$

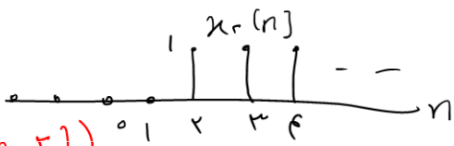
$x_3[n] = \begin{cases} 2, & n = 0, 1 \\ 0, & o.w. \end{cases}$ ، $y_3[n] = ?$

با فرض LTI بودن.

$$x_2[n] = x_1[n-2] \Rightarrow y_2[n] = y_1[n-2] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]$$

$$x_3[n] = 2\left(x_1[n] - x_2[n]\right)$$

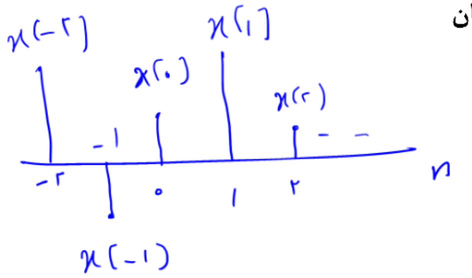




$$y_3[n] = 2\left(y_1[n] - y_2[n]\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} u[n-2]\right)$$

۳. بیان سیگنال گسسته بر حسب ضربه



$$x(n) = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,\delta[n-k]$$

۴. جمع کانولوشن

$$x(n) = \sum_{k} x(k)\,\delta(n-k)$$

$$\underset{\delta[n]}{x(n)} \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \underset{h[n]}{y(n)}$$

$$\hookrightarrow y(n) = \sum_{k} x(k)\, \overset{\text{عملکرد سیستم}}{T}\{\delta(n-k)\}$$

$$h(n) = T\{\delta(n)\}$$ پاسخ ضربه سیستم

$$\Rightarrow T\{\delta[n-k]\} = h(n-k)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k} x(k) h(n-k) = x(n) \overset{\text{کانولوشن}}{*} h[n]$$

$$= \sum_{m} h(m)\, x(n-m) = h(n) * x(n)$$

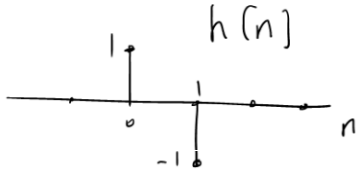
$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

- کانولوشن جابجاپذیر است.

۵. محاسبه پاسخ ضربه (در سیستم تفاضل مرتبه اول و در سیستم انباشت)

تفاضل مرتبه اول : $y[n] = x[n] - x[n-1] \Rightarrow$ سیستم LTI است

سپس $x[n]=\delta[n]$: $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$



نشان می‌دهیم سیستم LTI با پاسخ ضربه فوق همان سیستم تفاضل مرتبه اول است

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_k h[k]\, x[n-k]$$

$$= h[0]\,x[n] + h[1]\,x[n-1] = x[n] - x[n-1]$$

سیستم انباشت : $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$: LTI است

برای محاسبه پاسخ ضربه

$\hookrightarrow x[n] = \delta[n]$: $h[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) = u[n]$

نشان می‌دهیم سیستم LTI با پاسخ ضربه $u(n)$ همان سیستم انباشت است:

$$y[n] = x[n] * u[n] = \sum_k x(k)\, u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

فصل ۲- سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

۶. محاسبه کانولوشن به روش مستقیم (کانولوشن دو سیگنال نمایی)

مثال. $x(n) = \alpha^n u(n)$ ، $h(n) = \beta^n u(n)$ ، $y(n) = x(n) * h(n) = ?$

$$y(n) = \sum_k x(k)\, h(n-k) = \sum_k \alpha^k \underline{u(k)}\, \beta^{n-k} u(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} \underbrace{u(n-k)}_{k \le n \leftarrow n-k \ge 0} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \quad , \quad n \ge 0$$

$n < 0$: $y(n) = 0$

$$n \ge 0 : \quad y[n] = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

یادآوری : $\sum_{k=k_1}^{k_2} x^k = \dfrac{x^{k_1} - x^{k_2+1}}{1 - x}$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}\, u[n]$$

$\alpha \ne \beta$

$\alpha = \beta$: $y[n] = (n+1)\beta^n u[n]$

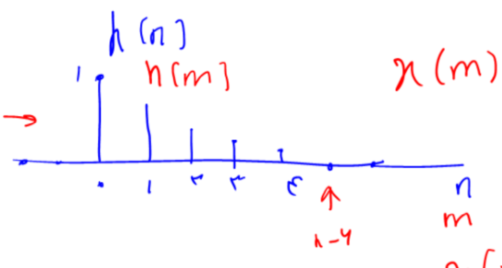
فصل۲- سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

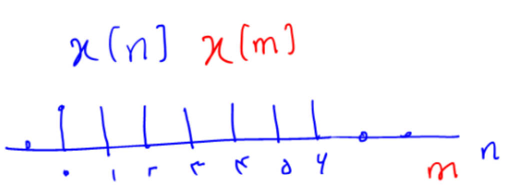
۷. محاسبه کانولوشن به روش ترسیمی (کانولوشن یک دنباله پالس و یک نمایی با طول محدود)

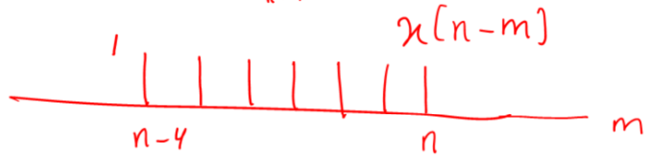
مثال. $x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 6 \\ 0, & o.w. \end{cases}$ و $h(n) = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \le n \le 4 \\ 0, & o.w. \end{cases}$

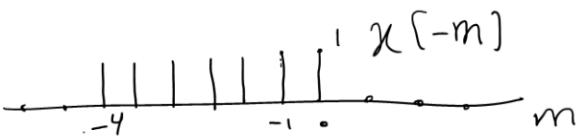
$y(n) = \sum_m x(n-m)\, h(m)$

۱- رسم تقریبی $x(m)$, $h(m)$









۲- رسم $x(-m)$ با قرینه کردن آینه‌ای $x(m)$ حول $m=0$

۳- شیفت n واحد به راست سیگنال $x(-m)$

۴- تعیین همپوشانی غیرصفر سیگنالهای $h(m)$ و $x(n-m)$ به ازای هر n از $-\infty$ تا $+\infty$

$n \leq -1 \; : \; y[n] = 0$

$0 \leq n \leq 4 \; : \; y[n] = \sum_{m=0}^{n} h(m)\, x(n-m] = \sum_{m=0}^{n} \alpha^m = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$

$5 \leq n \leq 6 \; : \; y(n) = \sum_{m=0}^{4} h(m)\, x(n-m] = \sum_{m=0}^{4} \alpha^m = \dfrac{1-\alpha^{5}}{1-\alpha}$

$7 \leq n \leq 10 \; : \; y(n) = \sum_{m=n-6}^{4} h(m)\, x(n-m) = \sum_{m=n-6}^{4} \alpha^m = \dfrac{\alpha^{n-6} - \alpha^{5}}{1-\alpha}$

$n \geq 11 \; : \; y(n) = 0$

پاسخ ضربه ورودی

$h(n) * \delta(n) = h(n]$

$x(n) * \delta(n) = x[n]$

$x(n) * \delta(n-n_0) = x(n-n_0]$

$x(n-n_0) * \delta(n) = x(n-n_0)$

$, \; x(n-n_1) * \delta(n-n_2) = x(n-n_1-n_2]$

یادآوری جلسه قبل

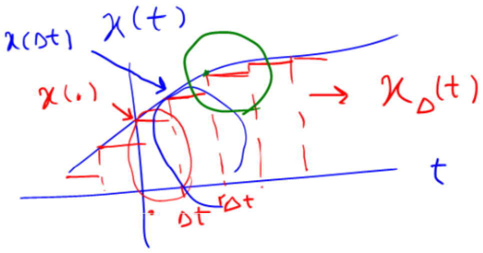
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_m x[m]h[n-m]$$

یادآوری: خطی بودن $\Rightarrow \alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \xrightarrow{\text{خروجی}} \alpha_1 y_1[n] + \alpha_2 y_2[n]$

تغییرناپذیری با زمان: $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$

یادآوری جلسه قبل: $x[n] = \sum_k x[k]\delta[n-k]$

بیان سیگنال پیوسته بر حسب سیگنال ضربه



$$x_\Delta(t) = \cdots + x(0)p(t) + x(\Delta t)p(t-\Delta t) + x(2\Delta t)p(t-2\Delta t) + \cdots$$

$$= \sum_k x(k\Delta t)p(t-k\Delta t)$$

$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} x_\Delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_k x(k\Delta t)p(t-k\Delta t) =$$

می‌دانیم: $\quad p(t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \Delta t \cdot \delta(t)$

$$\Rightarrow x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_k x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\cdot \Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\therefore \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

با توجه به خاصیت خطی بودن:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \underbrace{T\{\delta(t-\tau)\}}_{\text{پاسخ سیستم به ورودی } \delta(t-\tau)} d\tau$$

اگر $h(t)$ پاسخ سیستم به ورودی $\delta(t)$ باشد آنگاه، چون سیستم تغییرناپذیر با زمان است:

$$T\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\underbrace{t-\tau}_{s})\, d\tau = x(t) * h(t)$$

$$= +\int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\, x(t-s)\, ds = h(t) * x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$h(t) \longrightarrow \boxed{x(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

محاسبه کانولوشن به دو روش: تحلیلی، ترسیمی ~~و~~

مثال- $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$ و $h(t) = e^{-\beta t} u(t)$ ، $y(t) = ?$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad , \quad h(t) = \begin{cases} e^{-\beta t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \tau} u(\tau)\, e^{-\beta(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha \tau} e^{-\beta(t-\tau)} u(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\alpha \tau} e^{-\beta(t-\tau)}\, d\tau \quad , \quad t > 0$$

$$= e^{-\beta t} \int_{0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)\tau}\, d\tau = \frac{-e^{-\beta t}}{\alpha-\beta} e^{-(\alpha-\beta)\tau}\Big|_{0}^{t} = \frac{-e^{-\beta t}\left(e^{-(\alpha-\beta)t} - 1\right)}{\alpha-\beta}$$

$$= \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} \quad , \quad t > 0 \qquad , \quad y(t) = 0 \ , \ t < 0$$

$$y(t) = \frac{e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta} u(t) \quad , \quad \alpha \neq \beta$$

$$\alpha = \beta \; : \; y(t) = t e^{-\alpha t} u(t)$$

کانولوشن سیگنال با پله واحد (روش تحلیلی)

$$y(t) = x(t) * u(t) = ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \; :$$ سیستم انباشت

$$x(t) \longrightarrow \underbrace{\boxed{u(t)}}_{\text{انباشت}} \longrightarrow y(t)$$

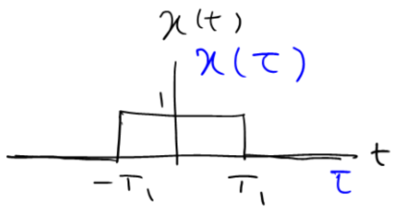
مثال - کانولوشن سیگنال با ضربه:

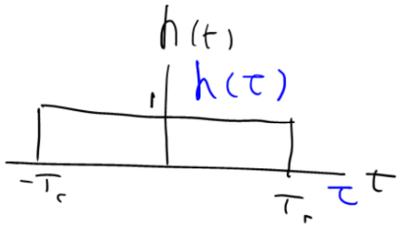
$$y(t) = x(t) * \delta(t) = ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

کانولوشن دو پالس (به روش ترسیمی) $, T_1 < T_2$

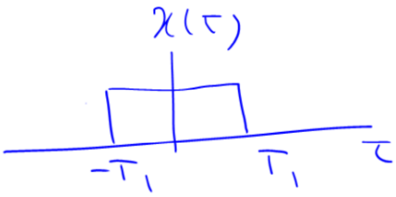




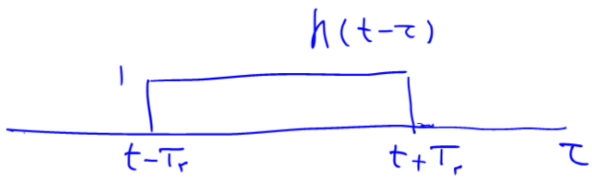
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

۱- رسم نمودار $x(\tau)$ و $h(\tau)$

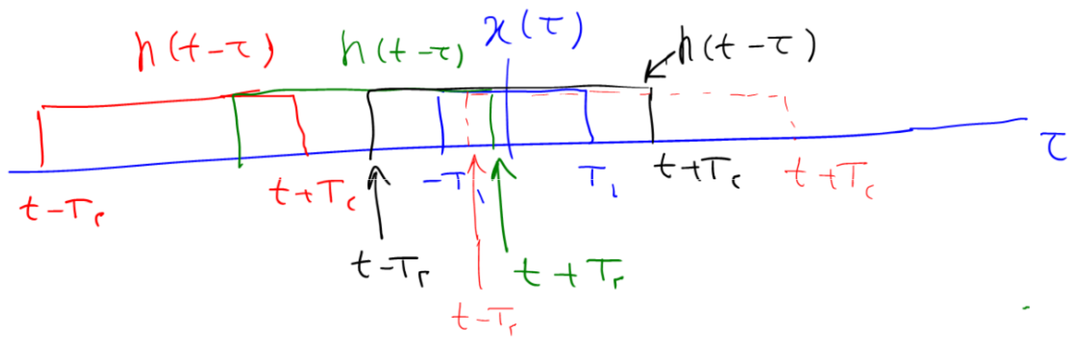
۲- با قرینه آینه‌ای $h(\tau)$ و شیفت به میزان t به راست، $h(t-\tau)$ رسم می‌شود.



۳- با فرض $t \to -\infty$، حاصلضرب $x(\tau)h(t-\tau)$ را تعیین کنید و بعد انتگرال بگیرید



۴- به مرور و با افزایش t، سیگنال $h(t-\tau)$ به راست می‌لغزد و در هر نقطه دوباره حاصلضرب و انتگرال را حساب کنید.



$y(t) = 0 \quad , \quad t < -(T_1 + T_2)$

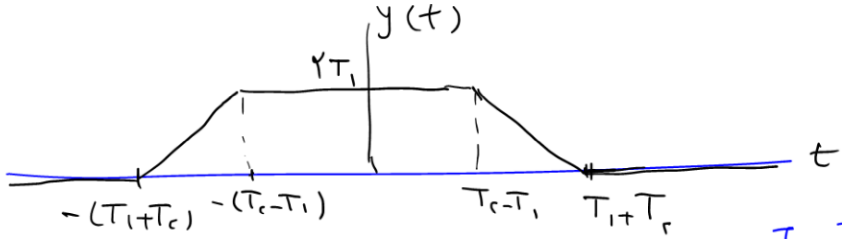
$y(t) = \int_{-T_1}^{t+T_2} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-T_1}^{t+T_2} d\tau = t + T_2 + T_1 \;,\; -(T_1+T_2) < t < -(T_2 - T_1)$

$y(t) = \int_{-T_1}^{T_1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-T_1}^{T_1} d\tau = 2T_1 \;,\; -(T_2-T_1) < t < T_2 - T_1$

$y(t) = \int_{t-T_2}^{T_1} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-T_2}^{T_1} d\tau = T_1 + T_2 - t \;,\; T_2 - T_1 < t < T_2 + T_1$

$y(t) = 0 \quad , \quad t > T_1 + T_2$

$$
y(t)=\begin{cases}
0 , & t<-(T_1+T_2) \\
t+T_2+T_1 , & -(T_2+T_1)<t<-(T_2-T_1) \\
2T_1 , & -(T_2-T_1)<t<T_2-T_1 \\
T_2+T_1-t , & T_2-T_1<t<T_2+T_1 \\
0 , & t>T_2+T_1
\end{cases}
$$



مجموع پهنای دو تا مستطیل

اختلاف پهنای دو پالس مستطیلی

۱- اگر دو سیگنال با طول محدود هم به ترتیب T_1 , T_2 باهم کانوالو شوند، طول سیگنال حاصل T_1+T_2 است.

۲- اگر یک پالس مستطیلی با خودش کانولوشن شود حاصل یک مثلث خواهد بود.

کانولوشن پالس و نمایی

خواص کانولوشن و ارتباط با اتصال سیستم‌ها

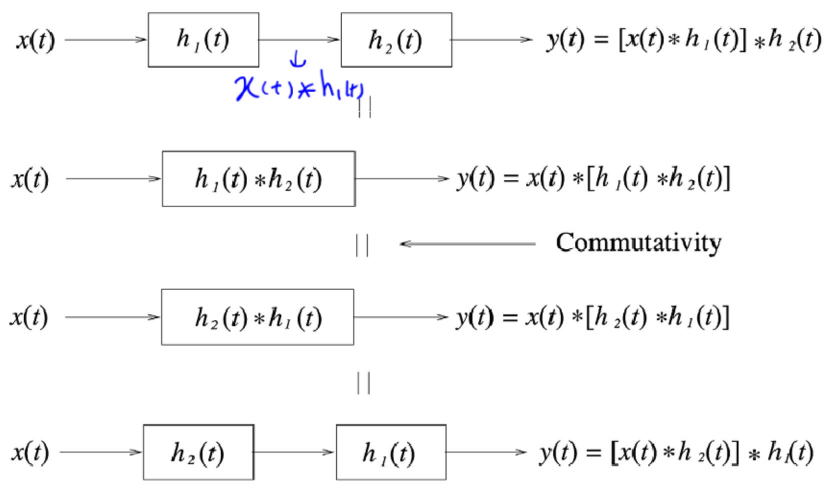
-خواص کانولوشن

۱- جابجایی‌پذیری:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

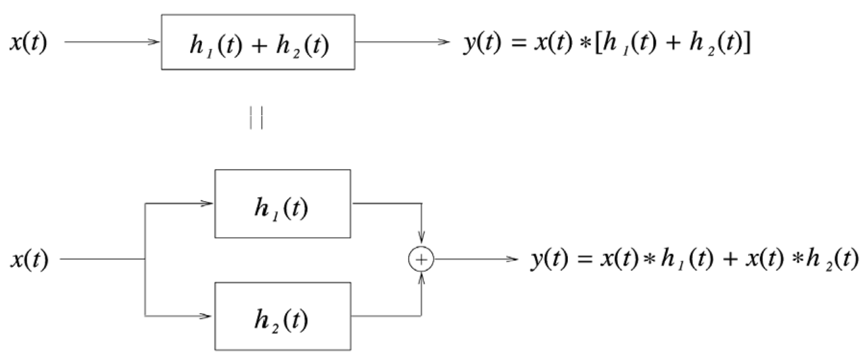
۲- شرکت پذیری

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$



۳- توزیع پذیری

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



- بررسی خواص سیستم LTI با استفاده از پاسخ ضربه

۱- بدون حافظه بودن

$$y[n] = \sum_k h[k]x[n-k]$$

$$= \cdots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots$$

سیستم بدون حافظه است اگر و تنها اگر $h[n] = 0 \,,\ \forall n \neq 0$ یا :

$$h[n] = A\delta[n]$$

$$\Downarrow$$

$y[n] = Ax[n]$: سیستم بهره ساده

در حالت پیوسته نیز : $h(t) = A\delta(t) \Rightarrow y(t) = Ax(t)$

۲- علی بودن

$$y[n] = \cdots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots$$

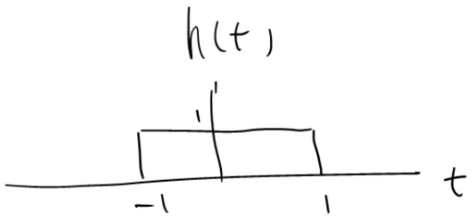
یک سیستم LTI علی است اگر $h(t)$ (یا $h[n]$) در لحظات $t<0$ ($n<0$) صفر باشد و برعکس.

مثال. $h[n] = u[n]$ (سیستم انباشت)، $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$ (تفاضل مرتبه اول)

علی $h[n]=0, \forall n<0$ علی

✓ $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

✓ $h(t) = e^{-t}u(t)$



غیرعلی: $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$

$h[n] = 2^n u[-n]$

۳- پایداری

$$|y[n]| = \left|\sum_k x[k]h[n-k]\right| \leq \sum_k |x[k]| \cdot |h[n-k]|$$

فرض کنید $x[n]$ کران بالای M دارد: $\forall n: |x[n]| \leq M$

$$\Rightarrow |y[n]| \leq M \sum_k |h[n-k]| = M \sum_k |h[k]|$$

حال اگر $\sum_n |h[n]| < \infty$ آنگاه: $|y[n]| < \infty$ پس سیستم پایدار است (شرط کافی)

نشان داده می‌شود شرط فوق، برای پایداری لازم هم هست.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI آن است که $h[n]$ مطلقا جمع‌پذیر باشد یعنی $\sum_n |h[n]| < \infty$

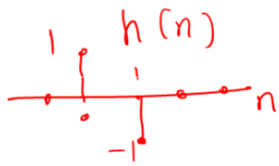
در حالت پیوسته، شرط بصورت مطلق انتگرال‌پذیر بیان می‌شود: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

مثال - سیستم انباشت آیا پایدار است؟ سیستم تفاضل مرتبه اول چطور؟

سیستم انباشت : $h(n)=u[n]$: $\sum_n |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \to \infty$

پس سیستم ناپایدار است.

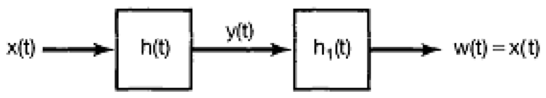
سیستم تفاضل مرتبه اول : $h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$



$$\sum_n |h(n)| = 1 + |-1| = 2 < \infty$$

پس سیستم پایدار است.

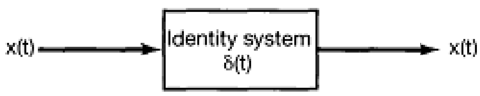
۴- معکوس پذیری



(a)

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h(n) * h_1(n) = \delta(n)$$



مثال - نشان دهید سیستم تفاضل مرتبه اول معکوس سیستم انباشت است؟

$h(n) = u(n)$

$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

$$\Rightarrow h(n) * h_1(n) = u(n) * (\delta(n) - \delta(n-1))$$

$$= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-1)$$

$$= u(n) - u(n-1) = \delta(n)$$

-سیستمهای پیوسته توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی خطی ضرایب ثابت (Linear Constant Coefficient Differential Equation-- LCCDE)

-سیستمهای گسسته توصیف شده با معادلات تفاضلی خطی ضرایب ثابت (Linear Constant Coefficient Difference Equation-- LCCDE)

- سیستمهای پیوسته توصیف شده با معادلات دیفرانسیلی خطی ضرایب ثابت

(Linear Constant Coefficient Differential Equation-- LCCDE)

شکل کلی:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

اگر معادله فوق به ازای همه زمانها برقرار باشد، سیستم فوق، یک سیستم LTI است.

اما اگر معادله فوق، از یک زمان به بعد معتبر باشد (مانند یک مدار RC که از لحظه وصل شدن یک کلید فعال می‌شود) و سیستم علی باشد، آنگاه

آیا سیستم LTI است؟

در این حالت برای تعیین خروجی لازم است شرایط اولیه را بدانیم: $\left\{y(0), y'(0), \dots, \left.\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}\right|_{t=0}\right\}$

$y(t)=?$
$t \geq 0$

مثال: سیستم علی با معادله $\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$ را در نظر بگیرید. به ازای $x(t) = Ke^{-3t}u(t)$ و شرط اولیه $y(0) = A$ خروجی y(t) را تعیین کنید.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + 2y = k e^{-3t}, & t \geq 0 \\ y(0) = A \end{cases} \Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \Rightarrow y_h(t) = a e^{-2t}$$

$$\frac{dy}{dt} + 2y = k e^{-3t} \xrightarrow{y_p(t) = b e^{-3t}} -3b e^{-3t} + 2b e^{-3t} = k e^{-3t} \Rightarrow b = -k$$

$$\Rightarrow y_p(t) = -k e^{-3t}$$

$$\Rightarrow y(t) = a e^{-2t} - k e^{-3t}, \quad y(0) = A \Rightarrow a - k = A \Rightarrow a = k + A \Rightarrow y(t) = (k+A)e^{-2t} - k e^{-3t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \underbrace{k(e^{-2t} - e^{-3t})}_{\text{پاسخ حالت صفر}} + \underbrace{A e^{-2t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}, \quad t \geq 0$$

نتیجه: سکون اولیه، شرط لازم و کافی برای LTI بودن یک سیستم علی LCCDE

شرایط اولیه صفر

سیستم‌های گسسته توصیف شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت (LCCDE)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

نکته: اگر معادله فوق برای همه مقادیر n برقرار باشد، سیستم LTI است (اثبات کنید)

- **اما اگر فقط به ازای n>0 برقرار باشد، داریم:**

$$\boldsymbol{y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \quad , \quad a_0 = 1}$$

مجموعه شرایط اولیه $\{y[-1], y[-2], \dots, y[-N]\}$

- **با کمک رابطه بازگشتی فوق، میتوان y[n] را در هر نقطه n تعیین کرد.**

مثال: معادله زیر را به ازای $x[n] = k\delta[n]$ حل کنید: $y[n] - a\,y[n-1] = x[n]$, n>0

با شرایط اولیه: $y[-1] = 0$

$y(n) = a y(n-1) + x(n)$, $x(n) = k\delta(n)$

$y(0) = a y(-1) + x(0) = k$

$y(1) = a y(0) + x(1) = ak$

$y(2) = a y(1) + x(2) = a^2 k$ $\quad \dots \quad$ $y(n) = a^n k \quad , \quad n \geq 0$

- **حل یک معادله LCCDE با شرایط اولیه**

مثال: معادله زیر را حل کنید: $y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = K\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, n>0

با شرایط اولیه: $y[-1] = A_1$, $y[-2] = A_2$

$$\begin{cases} y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = K\left(\frac{1}{4}\right)^n , \quad n \geq 0 \\ y(-1) = A_1 , \quad y(-2) = A_2 \end{cases}$$

$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

$y_h(n) - \frac{5}{6}y_h(n-1) + \frac{1}{6}y_h(n-2) = 0 \Longrightarrow y_h(n) = z^n$:پیشنهاد جواب

$z^n - \frac{5}{6}z^{n-1} + \frac{1}{6}z^{n-2} = 0 \Rightarrow z^{n-2}\left(z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right) = 0$

$\Rightarrow z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} , \; z_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_h(n) = a\left(\frac{1}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = K\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad , \quad y_p[n] = c\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$$c\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{5}{6}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}c\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = k\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow c - \frac{5}{6}c(4) + \frac{1}{6}c(4^2) = k \Rightarrow c\left(1 - \frac{10}{3} + \frac{8}{3}\right) = k$$

$$\Rightarrow c = 3k \Rightarrow y_p(n) = 3k\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y(n) = a\left(\frac{1}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3k\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y(-1) = A_1 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + 3k\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = A_1 \Rightarrow 2a + 3b = A_1 - 12k$$

$$y(-2) = A_2 \Rightarrow \qquad \Rightarrow 4a + 9b = A_2 - 48k$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}(3A_1 - A_2 - 12k),\ b = \frac{1}{3}(A_2 - 2A_1 - 24k)$$

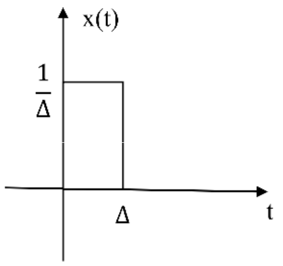
$$y(n) = A_1\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + A_2\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + k\left(-6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 8\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

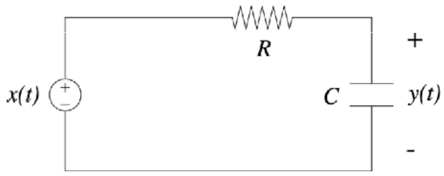
- سیستم علی LCCDE، آیا LTI است؟

اگر $A_1 = A_2 = 0$ آنگاه سیستم LTI خواهد بود.

مشروط به سکون اولیه (شرایط اولیه صفر)، LTI است.

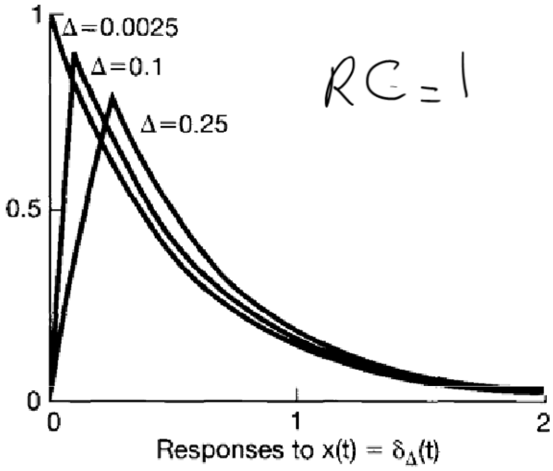
سیگنال ضربه بعنوان سیگنال پالس کوتاه





$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

با کاهش مقدار Δ از مقداری کوچکتر، مقدار y(t) تغییر نمیکند!



توصیف عملکردی توابع تکین (شامل ضربه، مشتقات آن و انتگرال‌های آن)

می دانیم: $x(t) * \delta(t) = x(t)$

سیستم

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow x(t)$$

$\delta(t)$: سیگنالی که کانولوشن آن با هر سیگنال، خودهمان سیگنال می‌شود.

با قبول تعریف فوق داریم:

$$x(t) = 1 : \quad x(t) * \delta(t) = \int x(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau = x(t)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1 \qquad (۱)$$

$$\int x(t)\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)\delta(-t-t_0)\,dt \,, \quad f(t) = x(-t), \quad t_1 = -t_0$$

$$= \int f(t)\delta(t_1 - t)\,dt = f(t_1) * \delta(t_1) = f(t_1) = x(t_0) \qquad (۲)$$

توصیف عملکردی $\delta'(t)$ (doublet):

$$x(t) \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow dx/dt$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{d/dt} \longrightarrow h(t) = \delta'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = x(t) * \delta'(t)$$

توصیف عملکردی $\delta''(t)$:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{d^2/dt^2} \longrightarrow d^2x/dt^2$$

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{d^2/dt^2} \longrightarrow h(t) = \delta''(t)$$

$$\parallel$$

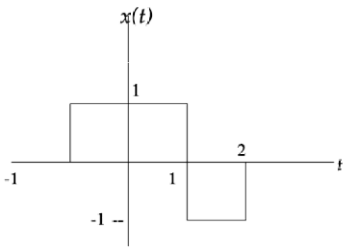
$$x(t) \longrightarrow \underset{\delta'(t)}{\boxed{d/dt}} \longrightarrow \underset{\delta'(t)}{\boxed{d/dt}} \longrightarrow d^2x/dt^2$$

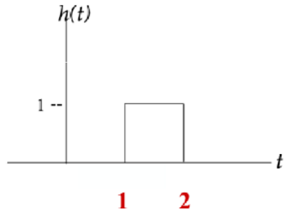
$$x(t) * \delta''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

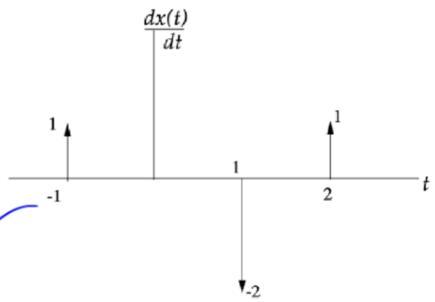
$$\delta'(t) * \delta'(t) = \delta''(t)$$

مثال:

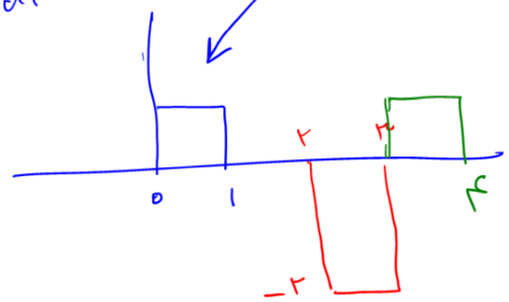
$$x(t) * h(t) = ?$$







$$g(t) = \frac{dx}{dt} * h(t)$$



$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$

$$\delta(t) = \delta'(t) * u(t)$$

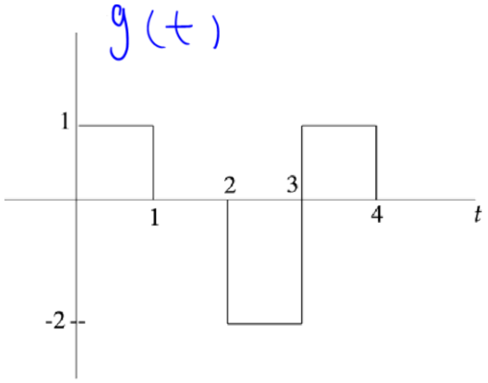
$$\Rightarrow x(t) = \underbrace{x(t) * \delta'(t)} * u(t)$$

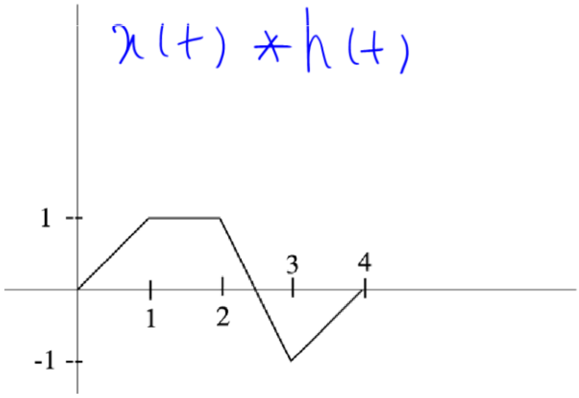
$$= \frac{dx}{dt} * u(t)$$

$$\Rightarrow x(t) * h(t) = \frac{dx}{dt} * u(t) * h(t)$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{dx}{dt} * h(t)}_{g(t)}\Big) * u(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau$$


g(t)
1
2
3
1
4
t
-2


x(t) * h(t)
1
3
4
1
2
-1

سیگنالها و سیستمها

فصل ۳: سری فوریه

جلسه اول

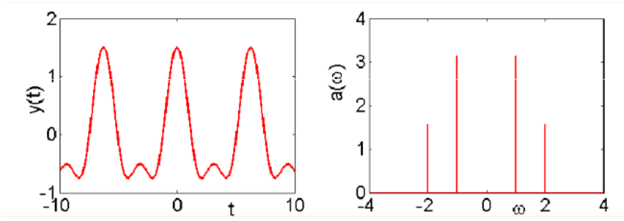
موضوعات این جلسه

- **سیگنال ویژه یک سیستم LTI**
- **پاسخ سیستم LTI پیوسته به ترکیب خطی چند سیگنال ویژه**
- **بیان سری فوریه یک سیگنال پیوسته متناوب**
- **همگرایی سری فوریه**

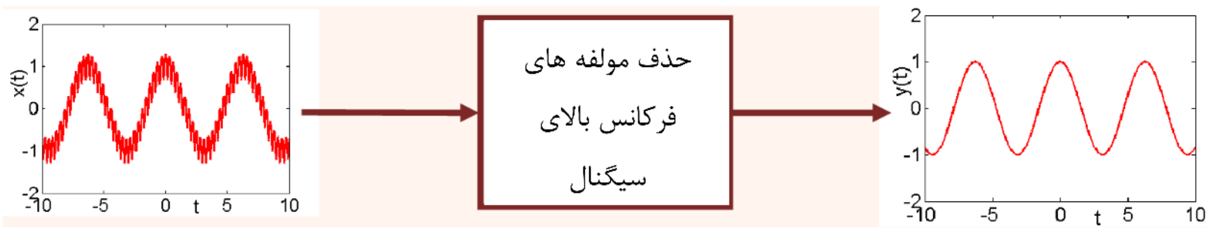
تحلیل فوریه؟

- تحلیل فوریه، یک ابزار قدرتمند برای تحلیل سیگنال ها و سیستم ها است.
- ابزار فوریه، بجای بیان سیگنال در حوزه زمان، آن را در حوزه فرکانس (حوزه فوریه) بیان می کند.

سیگنال در حوزه فرکانس



سیگنال در حوزه زمان



سیگنال پایه؟

- چرا سیگنال پایه: تحلیل ساده تر، درک بهتر
- ویژگیهای مطلوب:
  - بتوان دسته بزرگی از سیگنالها را بر حسب سیگنالهای پایه انتخابی بیان کرد.
  - پاسخ یک سیستم LTI به سیگنالهای پایه، ساده و مناسبتر برای درک عملکرد سیستم باشد.
- سیگنال پایه در فصل ۲: سیگنال ضربه
- سیگنال پایه در تحلیل فوریه: سیگنال ویژه هر سیستم LTI (سیگنال نمایی مختلط)

سیگنال ویژه یک سیستم LTI

یک مقدار مختلط s

$$x(t)=e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right] e^{st} \\ &= \underbrace{H(s)}_{\text{eigenvalue}}\ \underbrace{e^{st}}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$

✓ سیگنال نمایی مختلط، سیگنال ویژه هر سیستم LTI است.

یادآوری: $A\vec{u} = \lambda \vec{u}$

تابع تبدیل سیستم $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt$

$$x[n]=z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}\right] z^{n} \\ &= \underbrace{H(z)}_{\text{eigenvalue}}\ \underbrace{z^{n}}_{\text{eigenfunction}} \end{aligned}$$

$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, z^{-m}$

تابع تبدیل سیستم

سیگنال ویژه یک سیستم LTI

- پاسخ سیستم LTI به ترکیب ورودیهای نمایی مختلط:

$$x(t) \xrightarrow{\ e^{st}\ } \boxed{h(t)} \xrightarrow{\ H(s)e^{st}\ } y(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

$$x[n] \xrightarrow{\ z_k^{n}\ } \boxed{h[n]} \xrightarrow{\ H(z_k) z_k^{n}\ } y[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^{n} \longrightarrow y[n] = \sum_k H(z_k) a_k z_k^{n}$$

سیگنال ویژه مورد استفاده در تحلیل فوریه

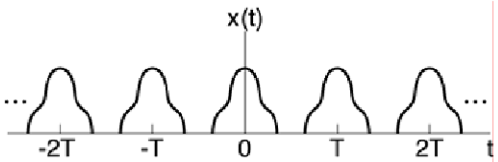
- در حالت زمان پیوسته (CT): $e^{st}|_{s=j\omega} = e^{j\omega t}$
- در حالت زمان گسسته (DT): $z^n|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\omega n}$
- سیگنالهای پایه مورد استفاده در تحلیل فوریه، دارای اندازه یک هستند:

$$|e^{j\omega n}| = 1 \qquad , |e^{j\omega t}| = 1$$

- سری فوریه، بیان سیگنالهای متناوب در حوزه فوریه است یعنی بیان بر حسب سیگنالهای نمایی مختلط با اندازه یک

سری فوریه سیگنال زمان پیوسته

- سیگنال متناوب (یادآوری): $\forall t, \quad x(t+T) = x(t)$



  - کوچکترین مقدار T>0 را دوره تناوب اصلی سیگنال و $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ را فرکانس پایه گویند.
  - T دوره تناوب سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ است پس دوره تناوب $\sum_k \ a_k e^{jk\omega_0 t}$ نیز خواهد بود (به ازای هر مقدار a_k)
- آیا a_kها را میتوان بگونه ای تعیین کرد که: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ a_k e^{jk\omega_0 t}$

$= \cdots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$

سری فوریه

a_k : ضرایب سری فوریه

- به a_0 مولفه DC سیگنال گفته میشود.
- همچنین به a_1 و a_{-1} مولفه های هامونی اول سیگنال گفته میشود.

سری فوریه سیگنال زمان پیوسته

یادآوری: $\int_c^{c+T} x(t)\,dt = \int_0^T x(t)\,dt$, (فرض: $x(t+T)=x(t)$)

- محاسبه ضرایب سری فوریه:
  - با ضرب دو طرف در $e^{-jn\omega_0 t}$ و انتگرالگیری در یک دوره تناوب: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = a_n \cdot T$$

- میدانیم (خاصیت تعامد):

$$\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T, & k=n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \frac{1}{j(k-n)\omega_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}\Big|_0^T = T\delta[k-n]$$

$$= \frac{e^{j(k-n)2\pi}-1}{j(k-n)\omega_0} = \frac{1-1}{\dots} = 0 \quad , \quad k \neq n$$

سری فوریه سیگنال زمان پیوسته

- (ادامه):

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

- سری فوریه و معکوس آن:

CT Fourier Series Pair $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$

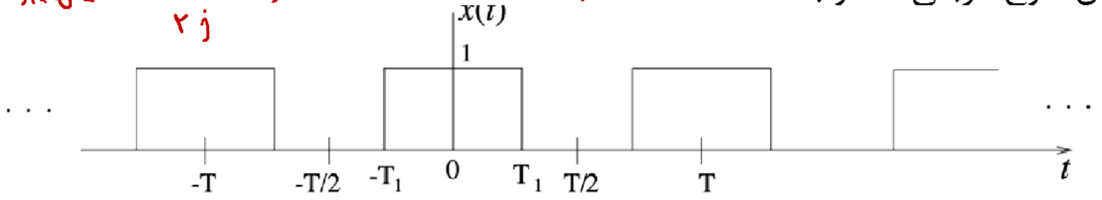
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{(Synthesis equation)}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{(Analysis equation)}$$

سری فوریه ...

یادآوری: $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$, $\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$

- مثال: موج مربعی متناوب



فرض: $2T_1 < T$

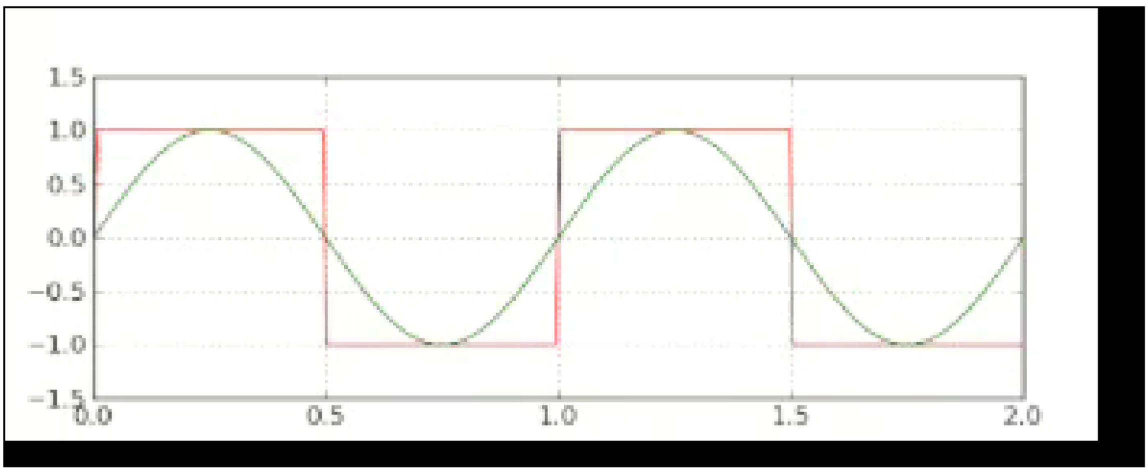
$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= -\frac{1}{jk\underbrace{\omega_0 T}_{2\pi}}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \quad \text{و} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \quad , \quad a_k \neq 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2T_1}{T} + \sum_{k=\pm 1}^{\pm\infty} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2T_1}{T}$$

a_0 مولفه DC یا متوسط سیگنال است.



همگرایی سری فوریه

- آیا همواره میتوان a_k ها را بگونه ای تعیین کرد که: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ ؟؟

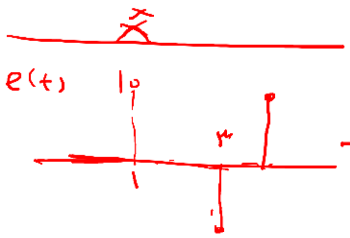
- پاسخ اول: اگر منظور از تساوی آن باشد که انرژی خطا، صفر است، یعنی: $\int_T |e(t)|^2 dt = 0$

که: $e(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$

در اینصورت کافیست x(t) در هر دروه تناوب انرژی محدودی داشته باشد، یعنی:

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

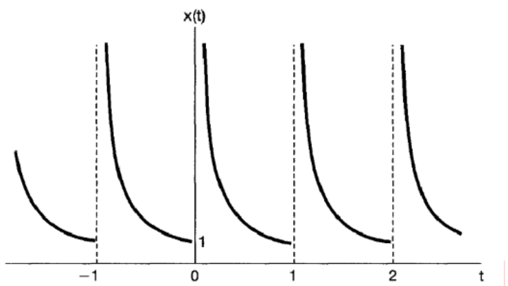
- صفر بودن انرژی خطا، تضمین نمیکند که خطا برابر صفر باشد. چرا؟



$\rightarrow \int |e(t)|^2 dt = 0 \ \wedge \ (e(t) \neq 0, \exists t)$

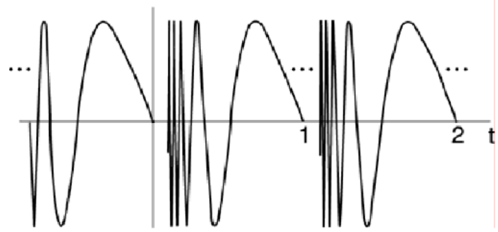
همگرایی سری فوریه

- پاسخ دوم: (شرایط دیریکله)
- شرط اول: در هر دوره تناوب، $x(t)$ مطلقا انتگرال پذیر باشد، یعنی: $\int_T |x(t)| dt < \infty$
  - مثال نقض شرط اول: x(t)=1/t, 0<t<1

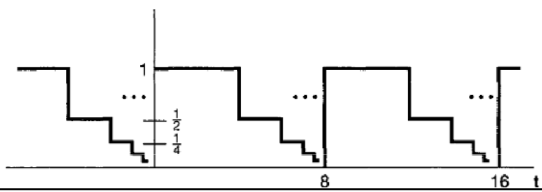


- شرط دوم: در هر بازه محدود، $x(t)$ تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.
  - مثال نقض شرط دوم:

$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \qquad 0 < t \le 1$$



- شرط سوم: در هر بازه محدود، $x(t)$ تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.
  - مثال نقض شرط سوم:



همگرایی سری فوریه

- همگرایی (پاسخ دوم): تحت شرایط دیریکله، سری فوریه سیگنال $x(t)$ در هر نقطه t به میانگین حدود چپ و راست $x(t)$ در نقطه t همگرا میشود، یعنی:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

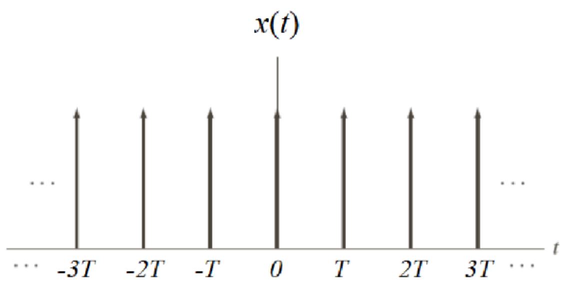
که در آن $x(t^-)$ و $x(t^+)$ بترتیب حد چپ و راست $x(t)$ در نقطه t است.

نتیجه: در نقاطی که $x(t)$ پیوستگی دارد، سری فوریه به مقدار سیگنال در آن نقاط همگرا میشود.

$$\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} = x(t)$$

مثال دیگری از سری فوریه

- مثال: قطار ضربه



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T} \quad \text{for } all\ k\ ! \end{aligned}$$

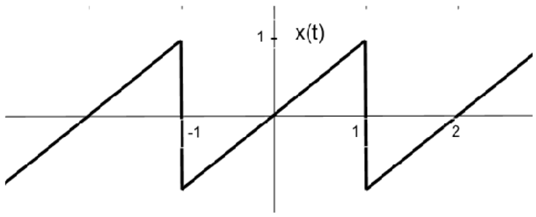
$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

$$\int^{\infty} \delta(t)dt = ?$$

توجه: همه‌ی اجزا دارای دامنه و فاز برابر هستند

مثال دیگری از سری فوریه



- مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را تعیین کنید:

$$x(t) = t, -1 < t < 1\,, \quad x(t+2) = x(t)$$

سری فوریه حقیقی

- اگر سیگنال x(t) حقیقی باشد، دو بیان دیگر نیز برای سری فوریه وجود دارد که در آن از توابع حقیقی سینوس و کسینوس استفاده میشود.
- میدانیم: $e^{jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)$
- سری فوریه حقیقی:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\gamma_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)]$$

که: $\alpha_k = a_k + a_{-k}$,$\beta_k = j(a_k - a_{-k})$

سیگنالها و سیستمها

فصل ۳: سری فوریه

جلسه دوم: خواص سری فوریه

یادآوری

- جفت رابطه سری فوریه:
  - اگر x(t) یک سیگنال متناوب با تناوب T باشد:

$x(t+T) = x(t)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi kt/T} \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

(سنتز)

فرکانس پایه

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

رابطه آنالیز

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

4

خواص سری فوریه

- فرضیات: x(t) و y(t) هر دو متناوب با تناوب T هستند و $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k$

- خطی بودن: $$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

  - مثال: $$y(t) = 1 + x(t) \leftrightarrow b_k = \begin{cases} 1 + a_0\,, & k = 0 \\ a_k\,, & k \neq 0 \end{cases}$$

- انتقال در زمان: $$x(t - t_0) \quad \leftrightarrow \quad a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

  - (تاخیر زمانی سبب تاخیر فاز در ضرایب سری فوریه میشود)

یادآوری: $z = r e^{j\theta}$

$|z| = r$ ، $\theta = \angle z$: فاز مقدار مختلط

  - اثبات:

$$x(t) = \sum_k a_k\, e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow x(t - t_0) = \sum_k a_k\, e^{jk\omega_0 (t - t_0)} = \sum_k \left(a_k e^{-jk\omega_0 t_0}\right) e^{jk\omega_0 t}$$

5

خواص سری فوریه

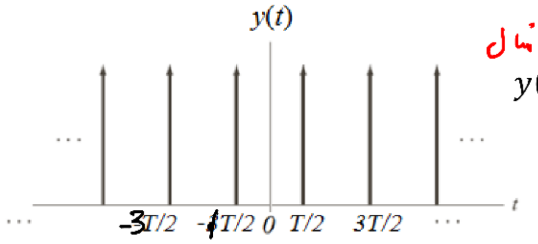
- مثال: شیفت به اندازه نیم پریود

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$a_k e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}}$

$$y(t) = x(t - T/2) \quad \leftrightarrow \quad a_k e^{-jk\pi} = (-1)^k a_k$$

$$\text{using} \quad e^{-jk\omega_0 T/2} \quad = \quad e^{-jk\pi}$$



مثال:

$y(t) = p\left(t - \frac{T}{2}\right);\qquad p(t) = \sum_n \delta(t - nT)$

قطار ضربه

$$y(t) \leftrightarrow \quad (-1)^k a_k \quad \left(a_k = \frac{1}{T} = \text{ F.C. of } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right)$$

$$\| $$

$$\frac{(-1)^k}{T}$$

خواص سری فوریه

- وارون زمانی: $x(-t) \leftrightarrow a_{-k}$
  - اگر x(t) زوج باشد، ضرایب سری فوریه نیز زوج است.
- تغییر مقیاس زمانی: $x(\alpha t) = \sum_k a_k\, e^{jk \underbrace{\alpha\omega_0}_{\omega_0'} t}$
  - تغییر مقیاس زمانی، تنها سبب تغییر فرکانس پایه سیگنال میشود.
- مزدوج سیگنال: $x^*(t) \leftrightarrow a^*_{-k}$
  - اثبات:

$$\left(x(t)\right)^* = \left(\sum_k a_k\, e^{jk\omega_0 t}\right)^* \Rightarrow x^*(t) = \sum_k a_k^*\, e^{-jk\omega_0 t} = \sum_k a^*_{-k}\, e^{jk\omega_0 t}$$

  - اگر x(t) حقیقی باشد: $x^*(t)$=x(t) پس: $a^*_{-k} = a_k$ در نتیجه (خواص تقارن):

$$|a_{-k}| = |a_k| \;,\; \angle a_{-k} = -\angle a_k$$

$$Re[a_{-k}] = Re[a_k] \;,\; Im[a_{-k}] = -Im[a_k]$$

$Re\{a_k\}$ is even, $Im\{a_k\}$ is odd
or
$|a_k|$ is even, $\angle a_k$ is odd

خواص سری فوریه

- **رابطه‌ی پارسوال**

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\text{توان متوسط سیگنال}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}$$

توان هارمونیک k ام $= P_{av}\{a_k e^{jk\omega_0 t}\}$

- توان متوسط سیگنال متناوب با مجموع توان متوسط تمام هارمونیک‌های آن برابر است
- رابطه پارسوال تعمیم یافته: $\frac{1}{T}\int_T x(t)y^*(t)dt = \sum_k a_k\, b_k^*$

اثبات:

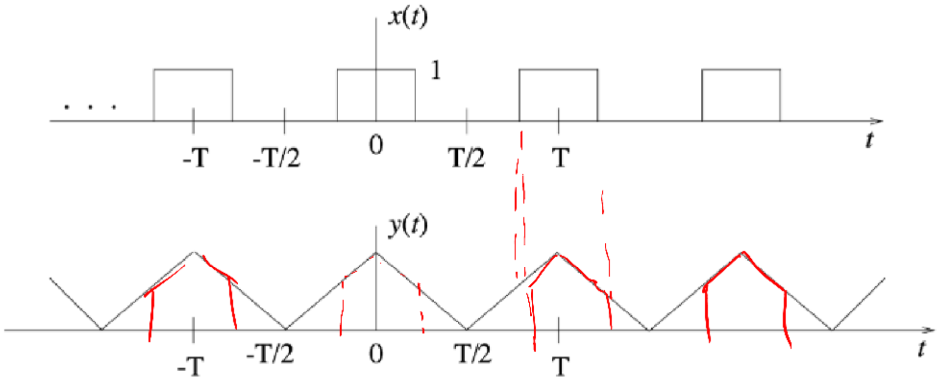
$$\frac{1}{T}\int_T x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\sum_m b_m^*\, e^{-jm\omega_0 t}\, dt =$$

$$\sum_m b_m^* \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt = \sum_m a_m\, b_m^*$$

8

کانولوشن متناوب

- کانولوشن دو سیگنال متناوب x(t) و y(t)؟ آیا مفید است؟



$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \infty$$

- کانولوشن دو سیگنال متناوب، یا واگراست یا صفر! بنابراین هیچ فایده ای ندارد.

9

کانولوشن متناوب

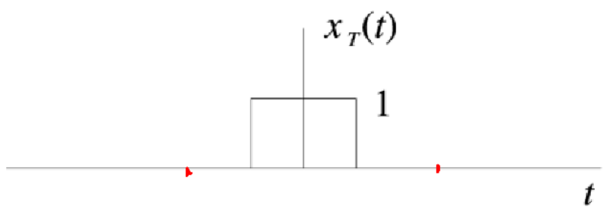
- کانولوشن متناوب: انتگرال کانولوشن در یک دوره تناوب

$z(t) = x(t) \underset{T}{\otimes} y(t)$

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau = x_T(t) * y(t) = x(t) * y_T(t)$$

where

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



- یعنی کانولوشن متناوب دو سیگنال برابر کانولوشن معمولی یک از آن دو با یک دوره تناوب از سیگنال دوم است.

کانولوشن متناوب (ادامه)

- z(t) متناوب با پریود T است. چرا؟

$$z(t) = x_T(t) * y(t)$$

- قبلا گفتیم که اگر یک سیگنال پریودیک به عنوان ورودی به یک سیستم LTI داده شود، خروجی پریودیک و با همان پریود است

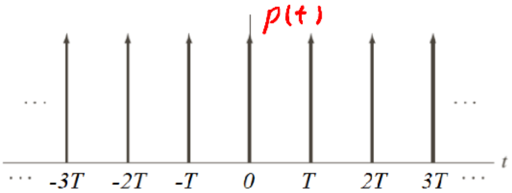
$$x(t) = x(t+T) \rightarrow y(t) = y(t+T)$$

در رابطه کانولوشن، y(t) را ورودی و $x_T(t)$ را به عنوان h(t) در نظر بگیرید

- مهم نیست که انتگرال بر روی کدام پریود گرفته شود: $z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t)$

کانولوشن متناوب

- مثال: کانولوشن متناوب قطار ضربه با سیگنال x(t) هر دو با تناوب T



$$x(t) \otimes p(t) = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

خواص سری فوریه (ادامه)

- کانولوشن متناوب در زمان

$$z(t) = x(t) \otimes y(t) \leftrightarrow c_k = T\, a_k b_k$$

یعنی کانولوشن متناوب در زمان، معادل ضرب ضرایب سری فوریه در حوزه فرکانس است.

اثبات:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \int_T \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)}_{b_k} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau \\ &= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = T a_k b_k \end{aligned}$$

خواص سری فوریه

- ضرب در زمان:

$$x(t)\cdot y(t) \quad \leftrightarrow \quad c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

یعنی ضرب دو سیگنال متناوب در زمان، معادل کانولوشن گسسته ضرایب سری فوریه است.

- اثبات:

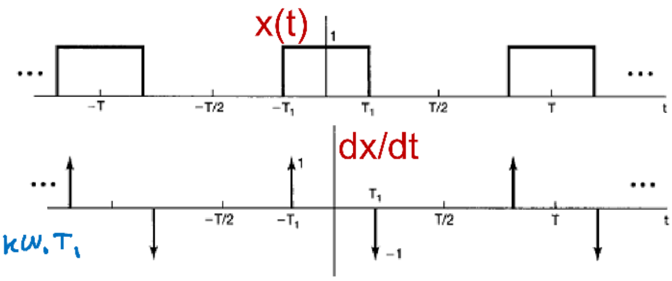
$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,y(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T \Big(\sum_m a_m e^{jm\omega_0 t}\Big) y(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$= \sum_m a_m \; \frac{1}{T}\int_T y(t)\,e^{-j(k-m)\omega_0 t}\,dt$$

$$= \sum_m a_m b_{k-m} = \sum_m b_m a_{k-m}$$

خواص سری فوریه

- مشتق سیگنال $\quad \frac{dx}{dt} \leftrightarrow jk\omega_0\, a_k$
- انتگرال سیگنال $(a_0 = 0)$ $\quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{jk\omega_0}\, a_k,\quad k \neq 0$
- وقتی $a_0 \neq 0$ آنگاه انتگرال x(t) متناوب نخواهد بود.
- مثال- ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را حساب کنید:



$x(t) \leftrightarrow a_k \quad , \quad \frac{dx}{dt} \leftrightarrow b_k$

$\frac{dx}{dt} = p(t+T_1) - p(t-T_1) \Rightarrow$

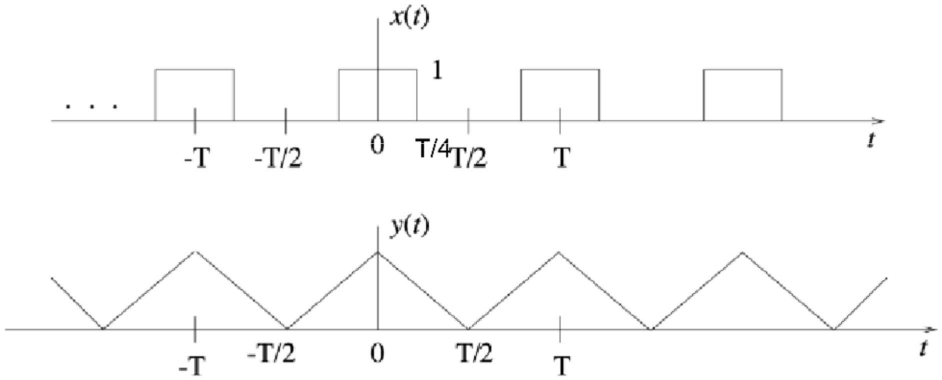
$b_k = \frac{1}{T}\left(e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}\right) = \frac{2j}{T}\sin k\omega_0 T_1$

$\Rightarrow a_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\,,\ k \neq 0,\quad a_0 = \frac{2T_1}{T}$

مثال

14

- مثال- مطلوبست ضرایب سری فوریه کانولوشن متناوب دو سیگنال زیر:



- فرض: $x(t) \leftrightarrow a_k$, $y(t) \leftrightarrow b_k$, $x(t) \otimes y(t) \leftrightarrow c_k$

روش دیگر برای محاسبه ضرایب سری فوریه y(t) این است که ابتدا ضرایب سری فوریه مشتق آن را حساب کنیم. مشتق y(t) شامل دو قطار پالس است ...

$$y(t) = x(t) \otimes x(t) \Rightarrow b_k = T a_k^2$$

$$c_k = T\, a_k b_k = T^2 a_K^3 = \ ...$$

مثال

15

- مثال- با اطلاعات زیر سیگنال x(t) را تعیین کنید:

۱- x(t) یک سیگنال حقیقی است. $\leftarrow \ a_k^* = a_{-k} \ \leftarrow$

$a_{-1} = a_1^*$, $a_{-1} = a_1$ $\Big\} \Rightarrow a_1 = a_1^*$

یعنی a_1 حقیقی است

۲- x(t) متناوب با تناوب T=4 و دارای ضرایب سری فوریه a_k است.

۳- $a_k = 0, for\ |k| > 1$ $\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$

۴- سیگنالی که ضرایب سری فوریه آن $b_k = e^{-j\pi k/2} a_{-k}$ است، یک سیگنال فرد است.

۵- $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$

$$b_{-k} = -b_k \Rightarrow e^{\frac{j\pi k}{2}} a_k = -e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k} = e^{j\pi} e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$$

$$\Rightarrow a_{-k} = e^{j\pi(k-1)} a_k \Rightarrow a_{-1} = a_1 \ ; \ a_0 = -a_0 = 0$$

چون x(t) حقیقی است

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |a_1| = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = a_{-1} = \pm\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \pm\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t}\right) = \pm\cos\left(\frac{\pi}{2}\, t\right)$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$$

سیگنالها و سیستمها
فصل ۳: سری فوریه

جلسه سوم- سری فوریه سیگنالهای زمان گسسته

موضوعات این جلسه

- بیان سری فوریه برای سیگنال زمان گسسته متناوب
- بررسی خواص شامل متناوب بودن، انتقال در زمان، وارون زمانی، کانولوشن متناوب، ضرب، مزدوج سیگنال و قضیه پارسوال

بیان سری فوریه برای سیگنال های گسسته زمانی متناوب

- x[n] : پریودیک با پریود اصلی N، فرکانس پایه ω_0:

$$x[n+N] = x[n] \quad \text{and} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- میدانیم سیگنال $e^{j\omega n}$ ، یک سیگنال نمایی متناوب با پریود N است اگر ω مضرب گویای 2π بصورت $\omega = \frac{2k\pi}{N}$ باشد. بعبارت دیگر سیگنال $e^{jk\omega_0 n}$ به ازای هر k یک سیگنال متناوب با پریود N است.

- ترکیب خطی سیگنالهای به شکل فوق، متناوب با تناوب N است: $\sum_k a_k e^{\frac{j2\pi k}{N}n}$

- سوال: آیا میتوان ضرایب ترکیب خطی فوق را بگونه ای تعیین کرد که:

$$x[n] = \sum_k a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

بیان سری فوریه ....

- توجه: تنها N سیگنال متمایز بصورت $e^{jk\omega_0 n}$ وجود دارد:

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{\overbrace{jN\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n}$$

- بنابراین k وقتی N مقدار صحیح متوالی را اختیار میکند، N سیگنال متفاوت بصورت فوق خواهیم داشت. مثلا N سیگنال روبرو: $e^{j0\omega_0 n}, e^{j1\omega_0 n}, e^{j2\omega_0 n}, \cdots, e^{j(N-1)\omega_0 n}$

- بیان دقیقتر سوال: آیا ضرایب a_k وجود دارد که:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

جمع روی N مقدار صحیح متوالی

- پاسخ: ضرایب فوق وجود دارد. زیرا N مقدار مجهول a_k به ازای N مقدار معلوم x[n] در یک دور تناوب، یک دستگاه معادلات خطی را تشکیل میدهد.

- به مجموع فوق، سری فوریه (جمع فوریه) گفته میشود.

تعیین ضرایب سری فوریه

- با توجه به جواب داشتن مساله، دو طرف را در $e^{-jm\omega_0 n}$ ضرب و سپس روی m در بازه ای بطول N جمع میکنیم:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jm\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\,k\omega_0 n}\right)e^{-jm\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\,(k-m)\omega_0 n}\right)$$ و $0 \le m \le N-1$

اما میدانیم:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q}$$

$\omega_0 N = 2\pi$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\,(k-m)\omega_0 n} = \frac{1-e^{j\,(k-m)\omega_0 N}}{1-e^{j\,(k-m)\omega_0}} = \begin{cases} 0\,, & k \neq m \\ N, & k = m \end{cases} = N\,\delta(k-m)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jm\omega_0 n} = N\,a_m$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jm\omega_0 n}\;, m = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

جفت روابط سری فوریه

سری فوریه (سنتز)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\;, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

ضرایب سری فوریه (آنالیز)

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}\;,$$

- نکته: $a_{k+N} = a_k$ (یعنی کافیست مقدار a_k به ازای k مقدار صحیح متوالی معلوم باشد).

زیرا:

$$a_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)\, \underbrace{e^{-j(k+N)\omega_0 n}}_{e^{-jk\omega_0 n}} = a_k$$

بیان سری فوریه ...

- مثال ۱: جمع دو سیگنا ل سینوسی

$$x[n] = \cos(\pi n/8) + \cos(\pi n/4 + \pi/4)$$
$$-\ \text{periodic with period } N = 16 \Rightarrow \omega_0 = \pi/8$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 n} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_0 n}\right] = \sum_{k=0}^{15} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=\langle 16\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Downarrow$$

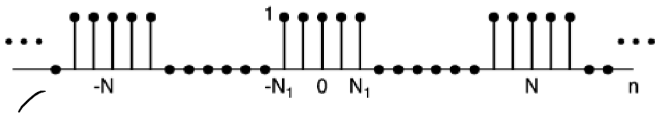
$$a_0 = 0 \qquad a_{15} = a_{-1+16} = a_{-1} = 1/2$$
$$a_1 = 1/2$$
$$a_{-1} = 1/2 \qquad a_{66} = a_{2+4\times 16} = a_2 = e^{j\pi/4}/2$$
$$a_2 = e^{j\pi/4}/2$$
$$a_{-2} = e^{-j\pi/4}/2$$
$$a_3 = 0$$
$$a_{-3} = 0$$
$$\vdots$$

$$a_{10} = a_{-6+16} = a_{-6} = 0$$
$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$$
$$a_8 = a_{-8} = 0, \quad a_9 = a_{-7} = 0$$

$$a_{10} = 0$$
$$a_{11} = 0$$
$$a_{12} = 0$$
$$a_{13} = 0$$
$$a_{14} = a_{-2}$$
$$a_{15} = a_{-1} =$$

بیان سری فوریه ...

- مثال ۲: موج مربعی گسسته در زمان



$$\begin{cases} x[n] = x[n+N] \\ x[n] = 1, \quad -N_1 \le n \le N_1 \\ x[n] = 0, \quad N_1 < n \le \frac{N}{2}, \quad -\frac{N}{2} \le n < -N_1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] = \frac{2N_1+1}{N} = a_N = a_{-N} = a_{6N} = \cdots$$

For $k \neq$ multiple of N: Using $n = m - N_1$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0(m-N_1)}$$

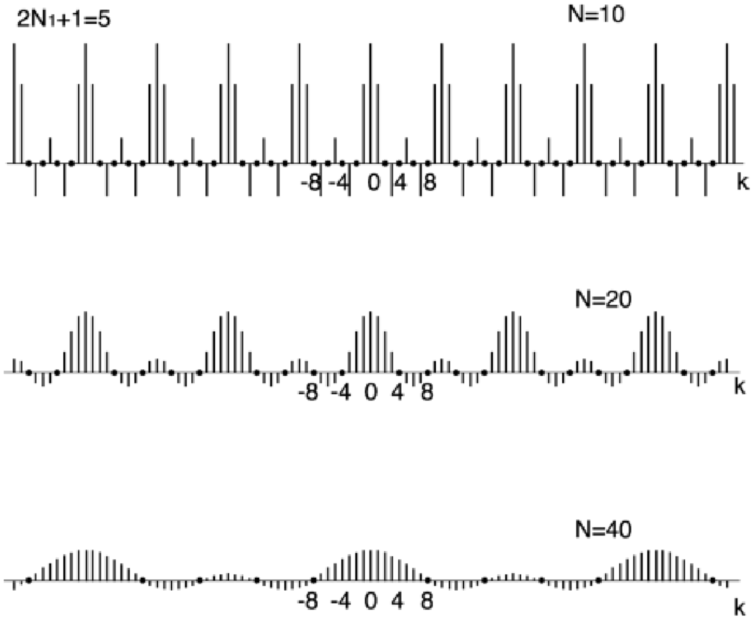
$$z = e^{-jk\omega_0}$$

$$= \frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}\left(e^{-jk\omega_0}\right)^m = \frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\frac{1 - e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\omega_0}} = \frac{1}{N}z^{-N_1}\frac{1 - z^{2N_1+1}}{1 - z}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin[k(N_1+1/2)\omega_0]}{\sin(k\omega_0/2)} = \frac{1}{N}\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

$$\Downarrow = \frac{1}{N} z^{-N_1} \frac{z^{\frac{2N_1+1}{2}}\left(z^{-\frac{2N_1+1}{2}} - z^{\frac{2N_1+1}{2}}\right)}{z^{\frac{1}{2}}\left(z^{-\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right)}$$

- مثال ۲: موج مربعی گسسته در زمان (ادامه)



ضرایب سری فوریه در سه حالت

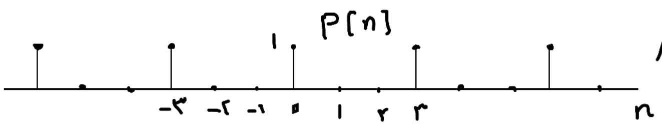
$N = ۱۰ \; , \; N_1 = ۲$

$$a_k = \frac{1}{N} \frac{\sin\left[(۲N_1+1)\frac{\pi k}{N}\right]}{\sin \frac{\pi k}{N}}$$

$N = ۲۰ \; , \; N_1 = ۲$

$N = ۴۰ \; , \; N_1 = ۲$

- مثال۳: ضرایب سری فوریه قطار ضربه $p[n] = \sum_m \delta[n - mN]$



$N = ۳$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-1}^{N-2} \delta[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \quad , k = 0, \pm1, \pm2, , \dots$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

- **همگرایی برای سری فوریه گسسته در زمان**
  - مساله ای بنام همگرایی وجود ندارد چرا که در هر دو رابطه سنتز و آنالیز با مجموع محدود مواجهیم.

خواص سری فوریه سیگنال های گسسته در زمان

11

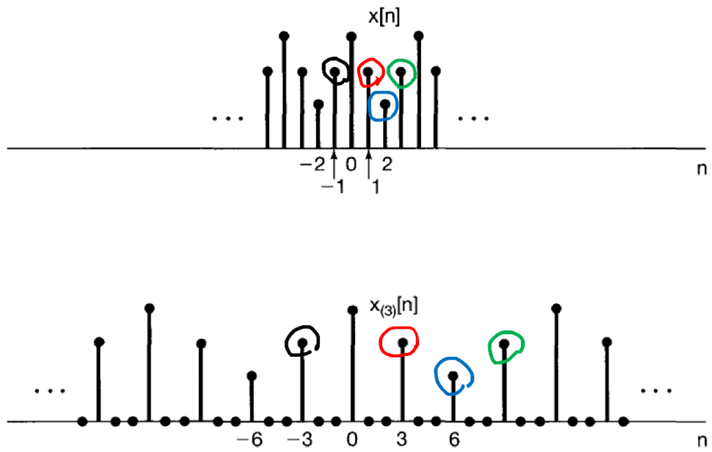
Property	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
	$\left.\begin{array}{l} x[n] \\ y[n] \end{array}\right\}$ Periodic with period N and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/N$	$\left.\begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array}\right\}$ Periodic with period N
Linearity	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$
Frequency Shifting	$e^{jM(2\pi/N)n} x[n]$	a_{k-M}
Conjugation	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Time Reversal	$x[-n]$	a_{-k}
Time Scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{if } n \text{ is a multiple of } m \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$ (periodic with period mN)	$\frac{1}{m} a_k \begin{pmatrix} \text{viewed as periodic} \\ \text{with period } mN \end{pmatrix}$
Periodic Convolution	$\sum_{r=\langle N\rangle} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
Multiplication	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l}$

تعریف تغییر مقیاس در حالت زمان گسسته

12

- تغییر مقیاس زمانی

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k. \end{cases}$$



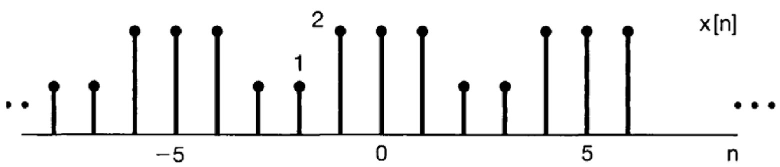
خواص سری فوریه سیگنال های گسسته در زمان

Conjugate Symmetry for Real Signals	$x[n]$ real $\Rightarrow x^*(n) = x(n) \Rightarrow$	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \mathcal{R}e\{a_k\} = \mathcal{R}e\{a_{-k}\} \\ \mathcal{I}m\{a_k\} = -\mathcal{I}m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	$x[n]$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	$x[n]$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals	$\begin{cases} x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \\ x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\} & [x[n] \text{ real}] \end{cases}$	$\mathcal{R}e\{a_k\}$ $j\mathcal{I}m\{a_k\}$

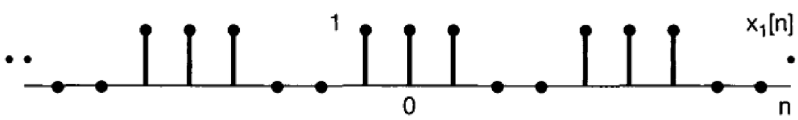
Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

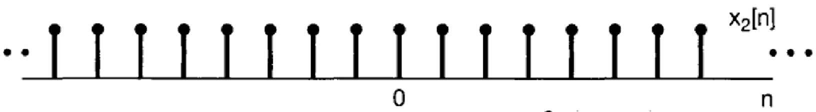
مثال



- مثال۴- ضرایب سری فوریه x[n]:
- سیگنال را بصورت مجموع دو سیگنال می نویسیم: $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ پس: $a_k = b_k + c_k$ که a_k، b_k و c_k بترتیب ضرایب سری فوریه سیگنالهای x[n]، $x_1[n]$ و $x_2[n]$ با پریود N=5 است.



$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{5}\frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & \text{for } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \frac{3}{5}, & \text{for } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}$$



$$c_0 = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4} x_2[n] = 1 = c_5 = c_{-5}$$

$c_k = 0, \; k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots$

$$a_k = \begin{cases} b_k = \frac{1}{5}\frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & \text{for } k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ \frac{8}{5}, & \text{for } k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \end{cases}$$

سیگنالها و سیستمها

فصل ۳: سری فوریه

جلسه چهارم-سری فوریه و پاسخ سیستم LTI به ورودی متناوب

موضوعات این جلسه

- ادامه سری فوریه زمان گسسته
- سری فوریه و سیستم LTI

جفت روابط سری فوریه

سری فوریه (سنتز)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad , \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

ضرایب سری فوریه (آنالیز)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \ ,$$

- نکته: $a_{k+N} = a_k$ یعنی کافیست مقدار a_k به ازای k مقدار صحیح متوالی معلوم باشد.

مثال

- مثال۵: اطلاعات زیر در مورد سیگنال x[n] داده شده است. سیگنال را تعیین کنید:

۱- x[n] پریودیک با پریود N=6 است.

۲- $\sum_{n=0}^{5} x[n] = 2$

۳- $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x[n] = 1$

۴- x[n] دارای کمترین توان در میان همه سیگنالهایی است که سه خاصیت فوق را دارند.

$x[n+6] = x[n] \Rightarrow a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=<6>} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{6}n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-j\frac{\pi}{3}kn}$

۱) $\sum_{n=0}^{5} x(n) = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x(n) = \frac{1}{3}$

۲) $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x(n) = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6} \sum_{n=2}^{7} x(n) e^{-j\pi n} = \frac{1}{6}$

۳) رابطه پارسوال: $\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{5} |a_k|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 + |a_4|^2 + |a_5|^2 \xrightarrow{\text{برای حداقل‌ترین توان}} a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0$

$\Rightarrow x(n) = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n} = a_0 + a_3 e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$

مثال

- مثال- سیگنال w[n] که ضرایب سری فوریه آن بصورت زیر داده شده است را تعیین کنید:

$$c_k = \frac{\sin^2(3\pi k/7)}{7\sin^2(\pi k/7)}$$

اولا $c_{k+7} = c_k$ پس دوره تناوب سیگنال ۷ است.

ثانیا داریم: $c_k = 7\, a_k\, a_k$ که : $a_k = \frac{\sin(3\pi k/7)}{7\,\sin(\pi k/7)}$.

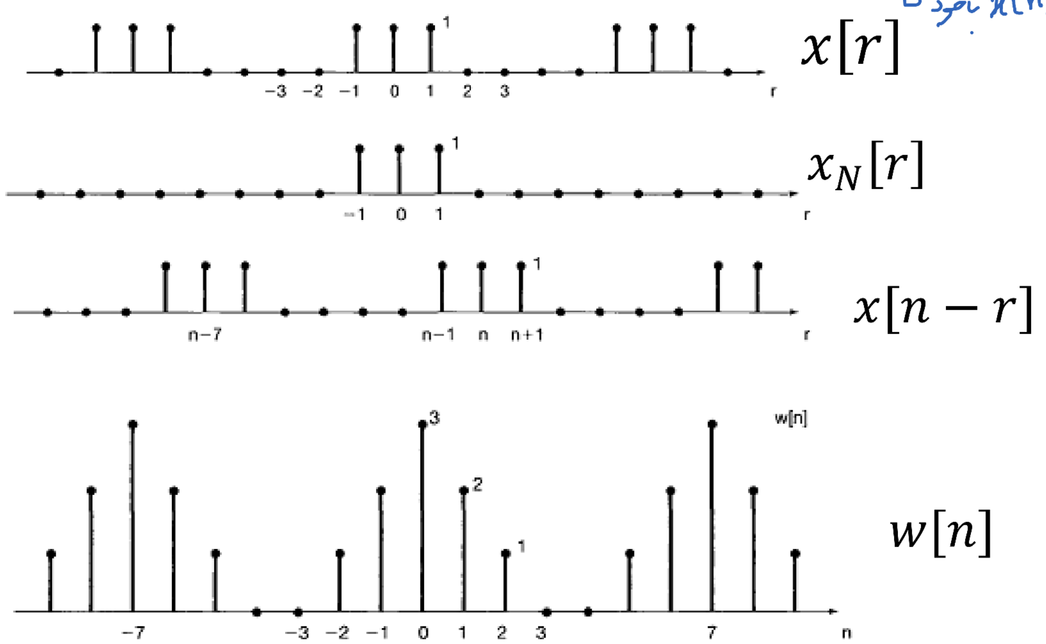
ثالثا میدانیم a_k ضرایب سری فوریه سیگنال پالس متناوب x[n] بصورت زیر است:

$$x[n] = \begin{cases} 1\,, & -1 \le n \le 1 \\ 0, & 2 \le n \le 5 \end{cases} \quad , \qquad x[n+7] = x[n]$$

$$\Rightarrow w[n] = x[n] \otimes x[n] = \sum_{r=-3}^{3} x[r]x[n-r] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_N[r]x[n-r]$$

مثال

کانولوشن متناوب x[n] با خودش



سری فوریه و سیستم LTI

- یادآوری از سیگنال ویژه سیستم LTI

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

درفوریه : $s = j\omega$

$$z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)z^{n}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

درفوریه : $z = e^{j\omega}$

سری فوریه و سیستم LTI

- اگر ورودی سیستم LTI متناوب و دارای نمایش سری فوریه باشد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(jk\omega_0)}_{\text{“gain”}}\, a_k$$

پاسخ فرکانسی سیستم: $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{jk\omega_0})a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{“gain”}}\, a_k$$

پاسخ فرکانسی سیستم: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

مثال

- مثال ۱: اگر $x(t)=e^{j2t}$ و $y(t)=x(t-3)$ باشد، خروجی را بدست آورید
  - روش اول:

$$x(t)=e^{j2t} \quad , \quad y(t)=x(t-3) \Rightarrow y(t)=e^{j2(t-3)}$$

  - روش دوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ ,\ H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-3)e^{-j\omega t}dt=e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t)=e^{j2t}\cdot H(j\omega)\Big|_{\omega=2}=e^{j2t}\cdot e^{-j6}$$

  - روش سوم:

$$h(t)=\delta(t-3)\ ,\ x(t)=e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-3)e^{+j2(t-\lambda)}d\lambda=e^{j2(t-3)}$$

مثال

- مثال ۲: اگر $x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)$ و $y(t)=x(t-3)$ باشد، خروجی را بدست آورید

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j7t}+\frac{1}{2}e^{-j7t}$$

$$h(t)=\delta(t-3)\Rightarrow H(j\omega)=e^{-j3\omega}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{j4t}H(j4)+\frac{1}{2}e^{-j4t}H(-j4)+\frac{1}{2}e^{j7t}H(j7)+\frac{1}{2}e^{-j7t}H(-j7)$$

$$=\frac{1}{2}e^{j4t}\cdot e^{-j12}+\frac{1}{2}e^{-j4t}\cdot e^{j12}+\frac{1}{2}e^{j7t}\cdot e^{-j21}+\frac{1}{2}e^{-j7t}\cdot e^{j21}$$

$$=\cos(4t-12)+\cos(7t-21)$$

مثال

□ مثال ۳: اگر $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$ و با ضرایب $a_0=1$، $a_1=a_{-1}=1/4$، $a_2=a_{-2}=1/2$ و $a_3=a_{-3}=1/3$ باشد و این ورودی به سیستمی با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ اعمال شود، ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورید

$(2\pi = \omega_0)$

$\underset{a_k}{x(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t), \quad b_k = ? = H(jk\omega_0)\, a_k$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t}dt = \frac{-1}{j\omega+1}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(jk\omega_0) = H(jk2\pi) = \frac{1}{1+jk2\pi}$$

$$b_0 = 1\times 1 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1+j2\pi}, \quad b_{-1} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-j2\pi},$$

$$b_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}, \quad b_{-2} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-j4\pi}, \quad b_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}, \quad b_{-3} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-j6\pi}$$

مثال

• پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n] = \alpha^n u[n]$ را به ورودی $x[n] = \cos\frac{2\pi}{N}n$ تعیین کنید

(α حقیقی و اندازه آن کمتر از یک است).

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}e^{-j(2\pi/N)n}$$

$|\alpha e^{-j\omega}| = |\alpha| < 1$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha e^{-j\omega}\right)^n \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \frac{1}{2}H\left(e^{j2\pi/N}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}H\left(e^{-j2\pi/N}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\underbrace{1-\alpha e^{-j2\pi/N}}_{re^{j\theta}}}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\underbrace{1-\alpha e^{j2\pi/N}}_{re^{j\theta}}}\right)e^{-j(2\pi/N)n}$$

تعریف کنید $\boxed{\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi/N}} = re^{j\theta}}$ $\longrightarrow$ $y[n] = r\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$

$r = |H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}}, \quad \theta = \measuredangle H(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}}$

مثال

- در حالت کلی، چنانجه ورودی یک سیستم LTI حقیقی یک سیگنال سینوسی باشد، خروجی نیز یک سیگنال سینوسی در همان فرکانس است که تنها دامنه و فاز آن ممکن است تغییر کرده باشد.

درحالت پیوسته : $x(t) = A\sin\omega_1 t \longrightarrow y(t) = A|H(j\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \measuredangle H(j\omega_1))$

درحالت گسسته : $x[n] = A\sin\omega_1 n \longrightarrow y[n] = A|H(e^{j\omega_1})|\sin(\omega_1 n + \measuredangle H(e^{j\omega_1}))$

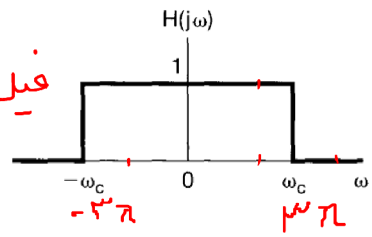
مثال

- مثال- فرض کنید سیستم LTI با پاسخ فرکانسی بصورت زیر داریم ($\omega_c = 3\pi$). اگر ورودی سیستم یک قطار ضربه با پریود $T = 1$ باشد، خروجی را تعیین کنید.

$T = 1 \Rightarrow \omega_0 = ۲\pi$

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

فیلتر



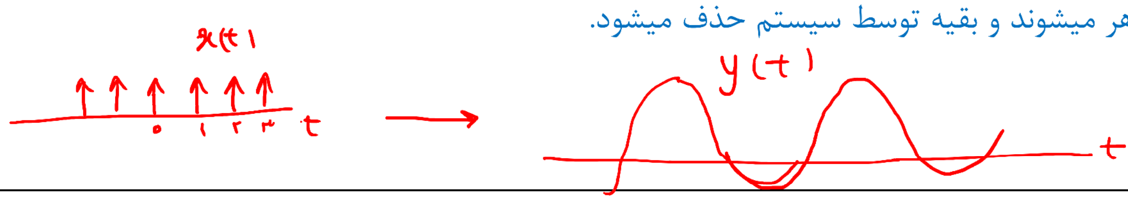
$x(t) = \sum_n \delta(t-n) \Rightarrow a_k = \frac{1}{T} = 1$

$\Rightarrow x(t) = \sum_k e^{j2\pi kt} \Rightarrow$

$y(t) = \sum_k e^{j2\pi kt} H(j2\pi k)$

$\Rightarrow y(t) = 1 + e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t} = 1 + 2cos2\pi t$

یعنی از همه مولفه های فرکانسی موجود در ورودی، تنها مولفه های dc و مولفه های هارمونی اول در خروجی ظاهر میشوند و بقیه توسط سیستم حذف میشود.



سیگنالها و سیستمها

فصل چهارم: تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته

Continuous Time Fourier Transform (CTFT)

جلسه اول

1

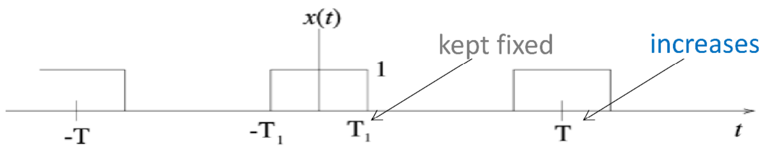
2

موضوعات این جلسه

- آیا یک سیگنال غیرمتناوب را میتوان بصورت ترکیب خطی سیگنالهای نمایی مختلط نوشت؟
- منظور از طیف فرکانسی یک سیگنال چیست؟
- بیان حوزه فرکانس (فوریه) برای سیگنالهای غیرمتناوب

یک مثال انگیزشی

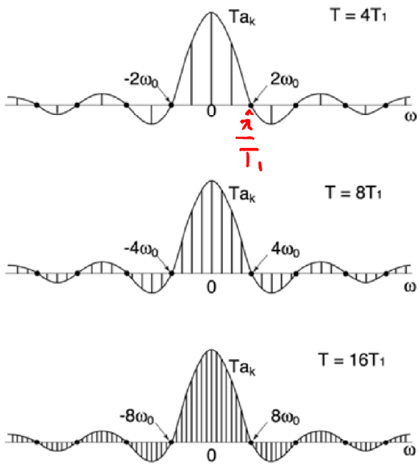
- سری فوریه پالس متناوب



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$



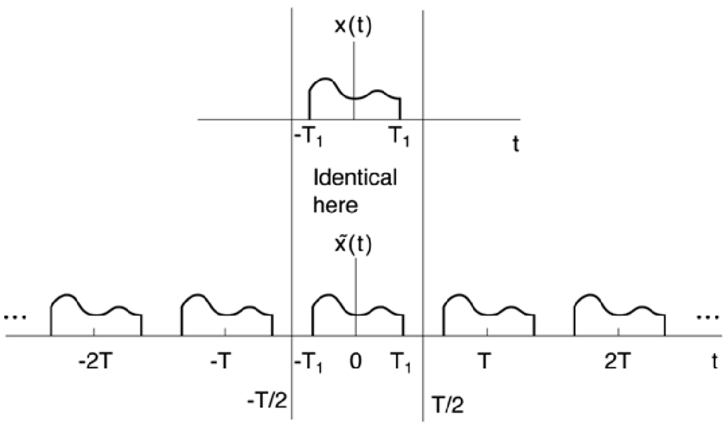
۱- با افزایش T، نمونه های متراکم تری روی ω انتخاب میشود.

۲- اما همواره، حول برخی فرکانسها، دامنه مولفه های فرکانسی، بزرگ است و حول برخی همواره کم.

۳- در حد، منحنی پیوسته ای که حاصل میشود، میتواند نماینده خوبی برای بیان حوزه فرکانس سیگنال باشد.

تعمیم ایده

- یک سیگنال دلخواه (فعلا با طول محدود) را میتوان یک دوره تناوب از یک سیگنال متناوب دید ...



$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ periodic, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\text{As } T \to \infty,\ \tilde{x}(t) = x(t) \text{ for all } t$$

تبدیل فوریه و عکس آن

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$\Rightarrow Ta_k = X(j\omega)|_{\omega=k\omega_0}$, *where*

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt}$$

تبدیل فوریه (رابطه آنالیز)
بعضا طیف سیگنال هم گفته میشود.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{X(jk\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}}_{f(k\omega_0)} . \omega_0$$

$$\xRightarrow[as\ T\to\infty]{} \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

عکس تبدیل فوریه (رابطه سنتز)

همگرایی تبدیل فوریه

- نوع اول همگرایی: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty$
- در این شرایط، انرژی خطا برابر صفر است، یعنی:

$$e(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Then} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2\, dt = 0$$

همگرایی تبدیل فوریه

- نوع دوم همگرایی (شرایط دیریکله):

۱- x(t) مطلقا انتگرال پذیر باشد: $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty$

۲- در هر بازه محدود، تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.

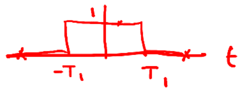
۳- در بازه محدود، تعداد محدودی ناپیوستگی داشته باشد.

- در این شرایط، انتگرال فوریه (سنتز)، به میانگین حدود چپ و راست سیگنال x(t) در نقطه t همگرا میشود.

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = x(t)$ at points of continuity

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =$ midpoint at discontinuity

(iii) Gibb's phenomenon



- نکته: چنانچه استفاده از سیگنال های ضربه را در بیان فوریه، مجاز بدانیم برای دسته بزرگتری از سیگنالها میتوان تبدیل فوریه بیان کرد.

مثال

- مثال- تبدیل فوریه ضربه

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega$$

- مثال- تبدیل فوریه ضربه شیفت یافته

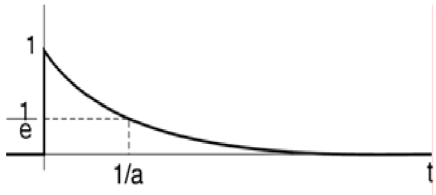
$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

$$= e^{-j\omega t_0}$$

مثال

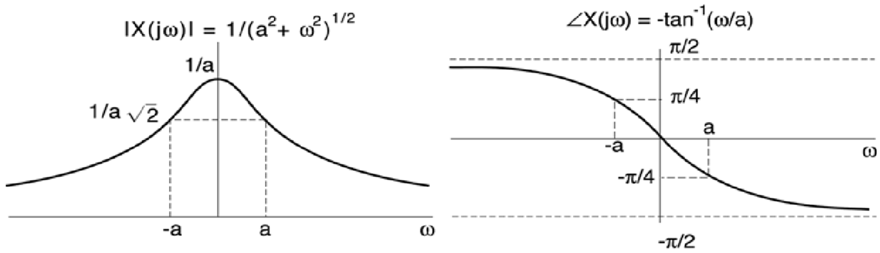
- مثال- تبدیل فوریه سیگنال نمایی یکطرفه



$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}}dt$$

$$= -\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$



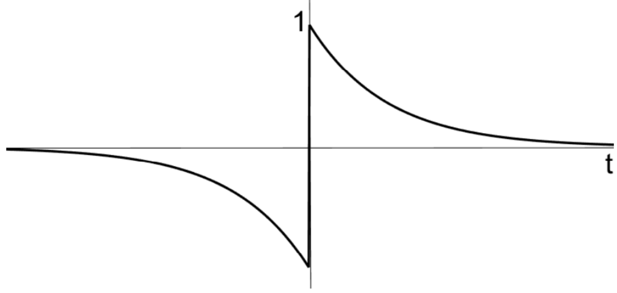
Even symmetry

Odd symmetry

مثال

- تبدیل فوریه سیگنال نمایی دوطرفه فرد ($a > 0$)

$$x(t) = \begin{cases} -e^{at}, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0}(-e^{at})e^{-j\omega t}dt + \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt$$

$$= -\frac{1}{a-j\omega}e^{(a-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{a+j\omega} = -\frac{j2\omega}{a^2+\omega^2}$$

نکته: در حالت خاص، وقتی $a \to 0$، سیگنال x(t) به سمت سیگنال علامت میل میکند، پس:

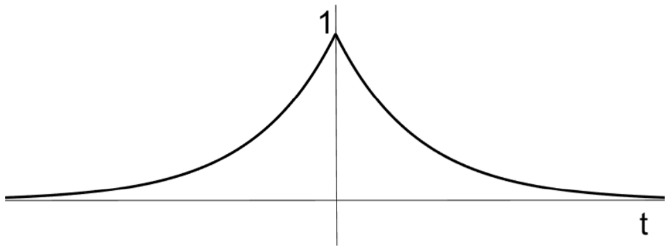
$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = \frac{2}{j\omega} \quad = -\frac{j2}{\omega}$$

مثال

• تبدیل فوریه سیگنال نمایی دوطرفه زوج

$$x(t) = e^{-a|t|} \;, (a > 0)$$

$$= \begin{cases} e^{-at} , & t > 0 \\ e^{at} , & t < 0 \end{cases}$$



$$X(\mathrm{j}\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

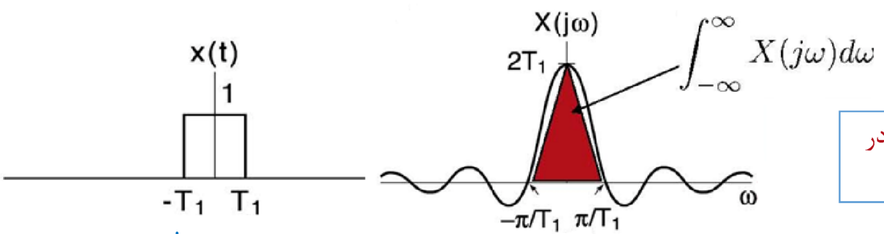
$$X(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

مثال

• پالس مستطیلی در حوزه زمان

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$

$$\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}}{-j\omega} = \frac{-2j\sin\omega T_1}{-j\omega}$$



اصل عدم قطعیت: سیگنال نمیتواند همزمان هم در زمان و هم در فرکانس، باریک باشد

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

• دو رابطه کاربردی:

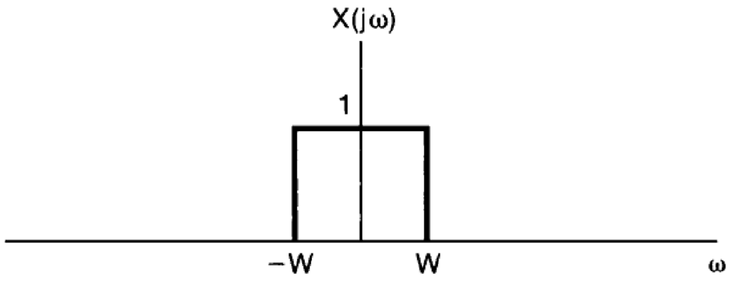
$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \times (\text{Area of the triangle})$$

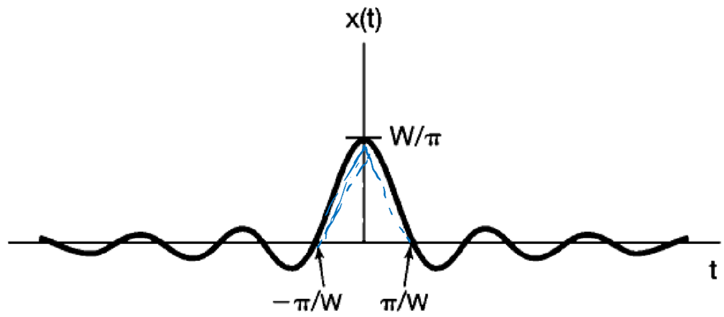
$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = 2T_1$$

مثال

- تبدیل فوریه معکوس پالس مستطیلی

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

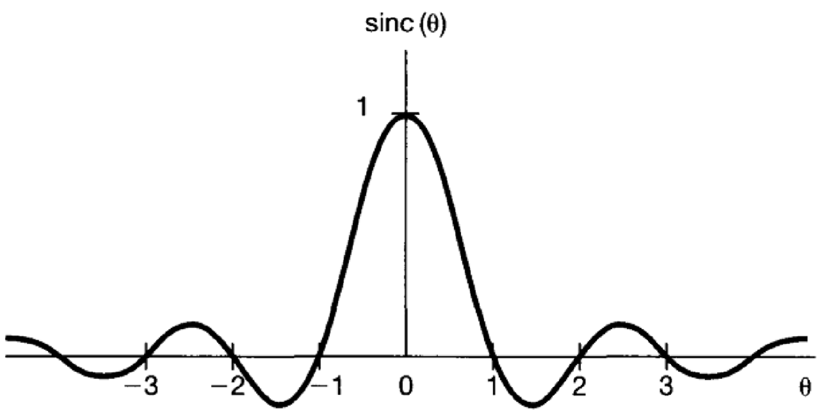




$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

- تعریف: تابع سینک بصورت $\operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$ تعریف میشود.
- تبدیل فوریه پالس زمانی و نیز تبدیل فوریه معکوس پالس فرکانسی را میتوان برحسب سینک نوشت:



$$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right).$$

$$= \frac{W}{\pi}\ \frac{\sin Wt}{Wt} =$$

مثال

- تبدیل فوریه سیگنال گوسی

$x(t) = e^{-at^2}$ A Gaussian, important in probability, optics, etc.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt$$

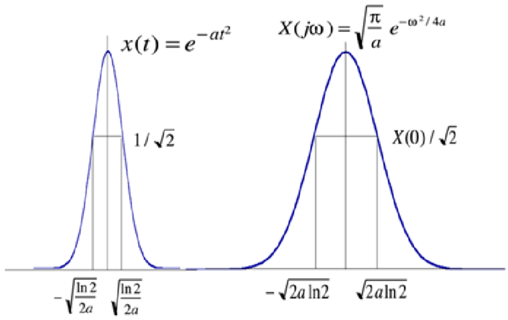
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a[t^2 + j\frac{\omega}{a}t + (\frac{j\omega}{2a})^2] + a(\frac{j\omega}{2a})^2} dt$$

$$= [\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+\frac{j\omega}{2a})^2} dt}_{\sqrt{\pi}/a}].e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$$



(Pulse width in *t*)•(Pulse width in ω)
⇒ $\Delta t \bullet \Delta\omega \sim (1/a^{1/2}) \bullet (a^{1/2}) = 1$

Uncertainty Principle! Cannot make *both* Δ*t* and Δω arbitrarily small.

سیگنالها و سیستمها

فصل چهارم: تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته

Continuous Time Fourier Transform (CTFT)

جلسه دوم

1

2

موضوعات این جلسه

- تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب
- خواص تبدیل فوریه
- انتقال زمانی و فرکانسی
- مشتق و انتگرال
- تغییر مقیاس
- دوگانی

تبدیل فوریه و عکس آن

تبدیل فوریه (رابطه آنالیز)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

عکس تبدیل فوریه (رابطه سنتز)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب

- ابتدا سیگنال متناوب نمایی را در نظر بگیرید. یعنی $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ و فرض کنید $X(j\omega)$ تبدیل فوریه آن باشد:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\boxed{\Rightarrow\ \mathcal{F}\{x(t) = 1\} = 2\pi\delta(\omega)}$$

حال فرض کنید $x(t)$ سیگنال متناوب با نمایش سری فوریه زیر باشد:

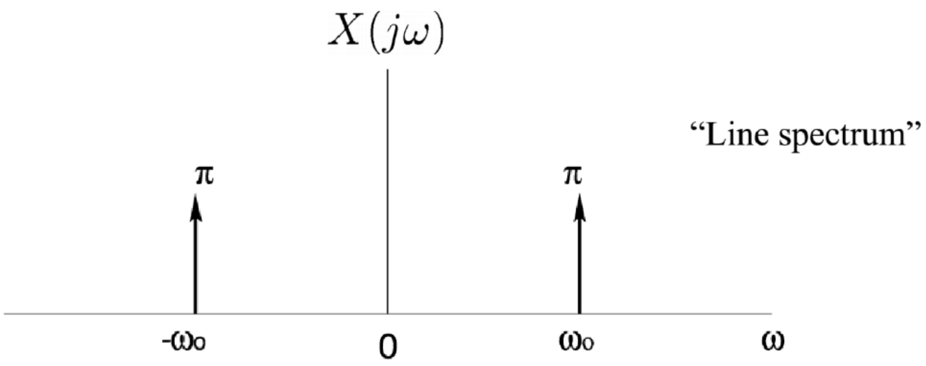
$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

- مثال-تبدیل فوریه کسینوس

$$x(t) = \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

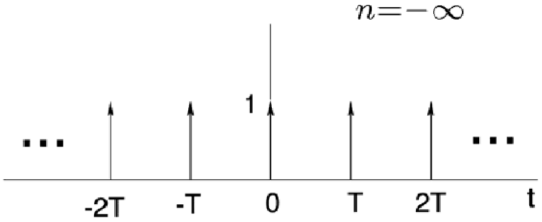
$$\updownarrow$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

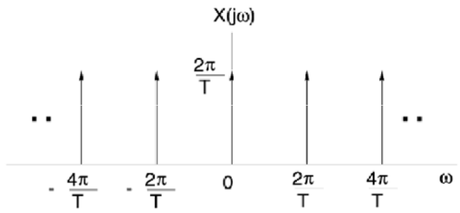


- مثال- تبدیل فوریه قطار ضربه

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$x(t) \leftrightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{2\pi a_k} \delta(\omega - \underbrace{\frac{k2\pi}{T}}_{k\omega_0})$$



تبدیل فوریه قطار ضربه، قطار ضربه است. هر چه فاصله ضربه ها در زمان بیشتر باشد، فاصله آنها در حوزه فرکانس کمتر است.

- مثال- تبدیل فوریه سیگنال پله

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\{sgn(t)\}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

خواص تبدیل فوریه

- خطی بودن

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

- انتقال در زمان

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

  - اثبات:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\underbrace{t - t_0}_{t'})e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j\omega t'} dt'}_{X(j\omega)}$$

انتقال در زمان، اندازه طیف را تغییر نمیدهد:

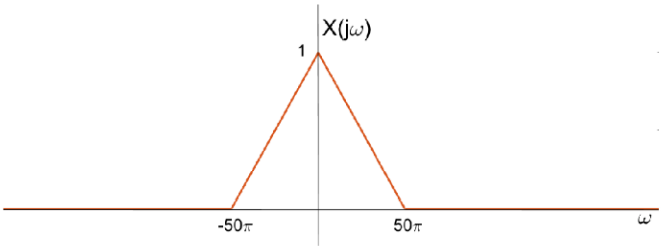
$$|e^{-j\omega t_0} X(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

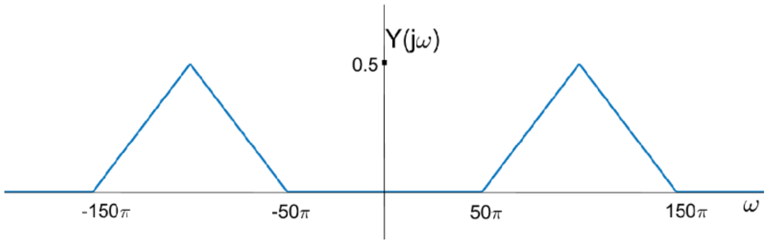
اما فاز طیف را خطی جابجا میکند:

$$\angle(e^{-j\omega t_0} X(j\omega)) = \angle X(j\omega) - \omega t_0$$

انتقال در فرکانس

- انتقال در فرکانس $\quad e^{j\omega_0 t}\, x(t) \leftrightarrow X\big(j(\omega-\omega_0)\big)$
    - مثال- تبدیل فوریه سیگنال $y(t)=x(t)\cos(100\pi t)$ را رسم کنید اگر تبدیل فوریه سیگنال x(t) بصورت زیر باشد.





$$y(t)=\frac{1}{2}x(t)e^{j100\pi t}+\frac{1}{2}x(t)e^{-j100\pi t}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Y(j\omega)}=\frac{1}{2}X(j(\omega-100\pi)+\frac{1}{2}X(j(\omega+100\pi)$$

مزدوج سیگنال

- مزدوج سیگنال $\quad x^*(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} X^*(-j\omega)$

زیرا:

$$X^*(j\omega)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{j\omega t}\,dt. \quad \Rightarrow \quad X^*(-j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

- تقارن مزدوج: وقتی سیگنال حقیقی است: $x^*(t)=x(t)$ پس: $X^*(-j\omega)=X(j\omega)$ در نتیجه:

$$|X(-j\omega)|=|X(j\omega)| \qquad \text{زوج} \qquad Re\{X(-j\omega)\}=Re\{X(j\omega)\}$$

$$\angle X(-j\omega)=-\angle X(j\omega) \qquad \text{فرد} \qquad Im\{X(-j\omega)\}=-Im\{X(j\omega)\}$$

تبدیل فوریه مشتق

- مشتق سیگنال $\dfrac{dx(t)}{dt} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega)$.
  - مثال- تبدیل فوریه $x(t) = sin\omega_0 t$

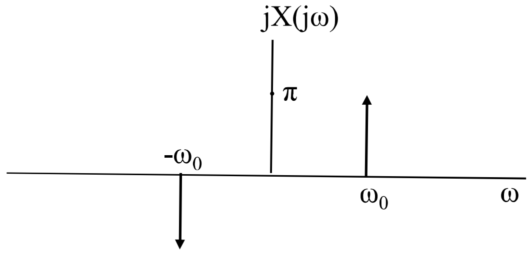
$$\mathcal{F}\{cos\omega_0 t\} = \pi\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$x(t) = -\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}(\cos\omega_0 t) \Rightarrow X(j\omega) = -\frac{\pi}{\omega_0} j\omega\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$= -\frac{j\pi}{\omega_0}\big(\omega\delta(\omega - \omega_0) + \omega\delta(\omega + \omega_0)\big)$$

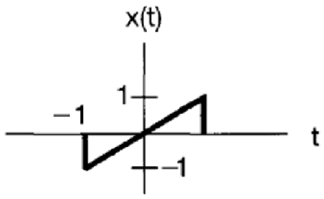
$$= -\frac{j\pi}{\omega_0}\big(\omega_0\delta(\omega - \omega_0) - \omega_0\delta(\omega + \omega_0)\big)$$

$$= -j\pi\,\big(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\big)$$



تبدیل فوریه انتگرال

- انتگرال سیگنال $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
  - اثبات بعد از بیان رابطه کانولوشن میاید.
  - مثال- تبدیل فوریه سیگنال x(t) شکل روبرو:



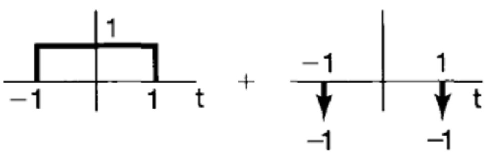
$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t).$$

$$G(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega}\right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}.$$

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega).$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}.$$

g(t)=



تغییر مقیاس

- تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$
  - فشرده شدن سیگنال در زمان← انبساط در فرکانس و برعکس. (تبدیل فوریه پالس را بیاد بیاورید)
  - انبساط در زمان یعنی هموارتر شدن سیگنال و انقباض در فرکانس یعنی چروکیده شدن طیف به سمت فرکانسهای پایین
  - نتیجه: هرچه سیگنال هموارتر باشد، طیف آن، تمرکز بیشتری حول فرکانسهای پایین دارد.

تغییر مقیاس

- در حالت خاص، a=-1، داریم: $x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega)$

بنابراین اگر x(t) زوج باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج است و اگر x(t) فرد باشد تبدیل فوریه ان نیز فرد است.

اگر x(t) حقیقی و زوج باشد: $X(j\omega) = X(-j\omega) = X^*(j\omega)$

یعنی در این حالت، تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج است.

و اگر x(t) حقیقی و فرد باشد، تبدیل فوریه آن، موهومی خالص و فرد است.

همچنین برای سیگنال حقیقی داریم:

$$\begin{array}{cccccc} X(j\omega) & = & Re\{X(j\omega)\} & + & jIm\{X(j\omega)\} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \textbf{For real } x(t) & = & Ev\{x(t)\} & + & Od\{x(t)\} \end{array}$$

دوگانی

- قبلا دیدیم تبدیل فوریه پالس، تابع سینک میشود و تبدیل فوریه سینک، پالس میشود. همچنین تبدیل فوریه ضربه، سیگنال ثابت میشود و تبدیل فوریه سیگنال ثابت، ضربه!
- بیان دقیق ارتباط های فوق:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = f(\omega) \Leftrightarrow \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

مثال: مطلوبست تبدیل فوریه سیگنال $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$.

میدانیم که اگر $X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$. آنگاه: $x(t) = e^{-|t|}$

پس:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{2}{1+t^2}\right\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

دوگانی

- اثبات رابطه دوگانی:

$$f(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{jvt}dv$$

$$\Leftrightarrow 2\pi \mathrm{x}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-j\omega v}dv \Leftrightarrow \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi x(-\omega)$$

- نتایج دوگانی:

$$-jtx(t) \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(jv)dv$$

سیگنالها و سیستمها

فصل چهارم: تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته
Continuous Time Fourier Transform (CTFT)
جلسه سوم

موضوعات این جلسه

- رابطه پارسوال
- کانولوشن
- تحلیل رفتار سیستم LTI در حوزه فوریه، مفهوم پاسخ فرکانسی

دوگانی

- مشتق و انتگرال در حوزه فوریه: $-jtx(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{dX(j\omega)}{d\omega}$

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(jv)dv$$

مثال - سیگنال $x(t)$ را که تبدیل فوریه آن برابر $X(j\omega) = \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$ است را تعیین کنید.

می دانیم: $Z(j\omega) = \dfrac{1}{a+j\omega} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} z(t) = e^{-at}u(t)$

$$\frac{dZ}{d\omega} = \frac{-j}{(a+j\omega)^2} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} -jt\,z(t) = -jte^{-at}u(t)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = j\frac{dZ}{d\omega} \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} te^{-at}u(t) \Rightarrow x(t) = te^{-at}u(t)$$

دوگانی

- (ادامه مثال) توجه: با تکرار همین روند، داریم:

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(a+j\omega)^n} \quad , \quad (Re\{a\} > 0)$$

- نکته: میتوان روابط فوق را با مشتقگیری نسبت به a هم بدست آورد:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\mathfrak{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}\right]$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{-te^{-at}u(t)\} = \frac{-1}{(a+j\omega)^2}$$

رابطه پارسوال

- رابطه پارسوال

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt}_{\text{انرژی سیگنال در حوزه زمان}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega}_{\text{انرژی سیگنال در حوزه فرکانس}}$$

- اثبات:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}y^*(t)d\omega\,dt$$

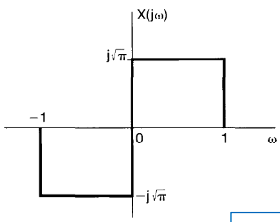
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}y^*(t)\,dt\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)Y^*(j\omega)\,d\omega$$

رابطه پارسوال

- مثال: برای سیگنال x(t) که تبدیل فوریه آن بصورت زیر است، مطلوبست تعیین مقادیر انرژ ی سیگنال، مشتق سیگنال در t=0 و سطح زیر سیگنال.

$$D = \frac{d}{dt}x(t)\Big|_{t=0} \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt \qquad A = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega = 1}$$



$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left(X(j\omega)\Big|_{\omega=0^+} + X(j\omega)\Big|_{\omega=0^-}\right) = 0}$$

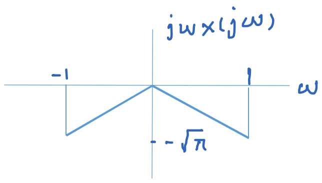
دوگانی و همگرایی

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} j\omega X(j\omega) = G(j\omega)$$

$$D = g(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}j\omega\, X(j\omega)d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{D = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}}$$



کانولوشن

- کانولوشن در زمان:

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

اثبات: فرض کنید x(t) ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) باشد:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}X(j\omega)d\omega\right)}_{\text{coefficient } a} e^{j\omega t}$$

$$ae^{j\omega t} \xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} H(j\omega)ae^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(H(j\omega)\frac{1}{2\pi}X(j\omega)d\omega\right)}_{H(j\omega)\cdot a} e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(j\omega)X(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t}d\omega$$

کانولوشن

- مثال- به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-at}u(t)$ ورودی $x(t) = e^{-bt}u(t)$ اعمال شده است. خروجی را تعیین کنید (a>0 , b>0).

حل در حوزه فرکانس:

$$H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \quad , \qquad X(j\omega) = \frac{1}{b+j\omega}$$

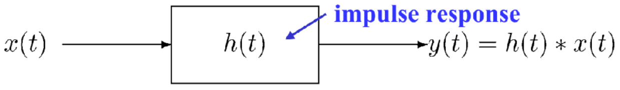
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)(b+j\omega)} = \frac{1}{b-a}.\left(\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{b+j\omega}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)u(t), \qquad a \neq b$$

$$a = b: Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} \Rightarrow y(t) = te^{-at}u(t)$$

پاسخ فرکانسی

- در یک سیستم LTI، پاسخ فرکانسی، تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم است.

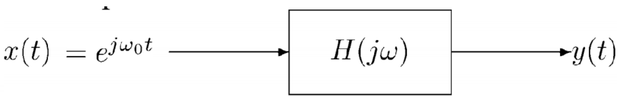


$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

frequency response

  - در یک سیستم پایدار، پاسخ فرکانسی وجود دارد.

- مثال- دوباره سیگنال ویژه



$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

پاسخ فرکانسی

- مثال- سیستم مشتقگیر

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

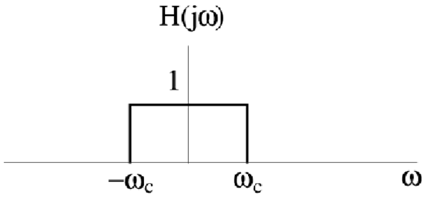
$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega) \quad \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

- سیستم فوق، فرکانس های بالا را بیشتر تقویت میکند و در ضمن فاز ثابت ۹۰ درجه اضافه میکند.

If $x(t) = sin\omega_0 t$: $y(t) = \frac{d}{dt}\sin\omega_0 t \;=\; \omega_0\cos\omega_0 t \;=\; \omega_0\sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

If $x(t) = cos\omega_0 t$: $y(t) = \frac{d}{dt}\cos\omega_0 t \;=\; -\omega_0\sin\omega_0 t \;=\; \omega_0\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

پاسخ فرکانسی



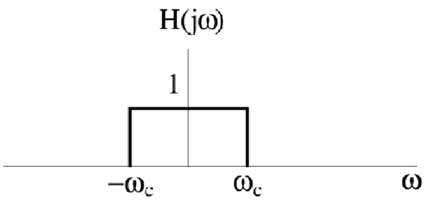
- مثال- پاسخ ضربه یک فیلتر پایین گذر ایده‌آل

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}d\omega = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

- غیرعلی، ناپایدار

پاسخ فرکانسی- ورودی متناوب

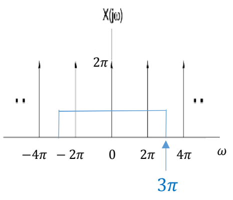
- مثال- فرض کنید سیستم LTI با پاسخ فرکانسی بصورت زیر داریم ($\omega_c = 3\pi$). اگر ورودی سیستم یک قطار ضربه با پریود $T = 1$ باشد، خروجی را تعیین کنید.



$$x(t) = \sum_n \delta(t-n) \Rightarrow a_k = \frac{1}{T} = 1 \Rightarrow X(j\omega) = 2\pi \sum_n \delta(\omega - 2\pi n)$$

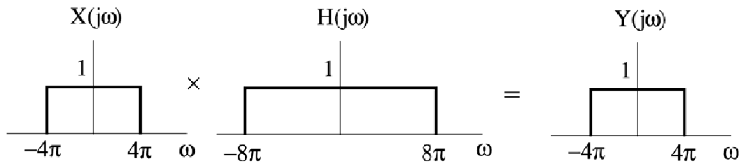
$$\Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = 2\pi(\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi))$$

$$\Rightarrow y(t) = 1 + 2\cos(2\pi t)$$



کانولوشن

- مثال- کانولوشن دو سینک $\underbrace{\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}}_{x(t)} * \underbrace{\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}}_{h(t)} = ?$



$$\Rightarrow y(t) = x(t)$$

- مثال- کانولوشن دو سیگنال گوسی $e^{-at^2} * e^{-bt^2} = ?$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \times \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\frac{\omega^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\omega^2}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

$$e^{-at^2} * e^{-bt^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \cdot e^{-\left(\frac{ab}{a+b}\right)t^2}$$

سیگنالها و سیستمها

فصل چهارم: تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته

Continuous Time Fourier Transform (CTFT)

جلسه چهارم

خاصیت ضرب؛ سیستم LCCDE؛ مثالهای تکمیلی

1

2

انباشت و رابطه کانولوشن

- دوباره تبدیل فوریه انتگرال (اثبات)

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \stackrel{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = x(t) * u(t) \longleftrightarrow X(j\omega)\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)$$

$$= \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(j\omega)\delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

خاصیت ضرب

- ضرب دو سیگنال (ادامه خواص فوریه) $r(t) = s(t) \cdot p(t) \quad \longleftrightarrow \quad R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]$
  - برای اثبات، میتوان از ویژگی دوگانی استفاده کرد ...
- مثال- تبدیل فوریه $x(t) = cos\omega_0 t\, u(t)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right] * \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega-\omega_0)} + \frac{1}{j(\omega+\omega_0)}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] + \frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

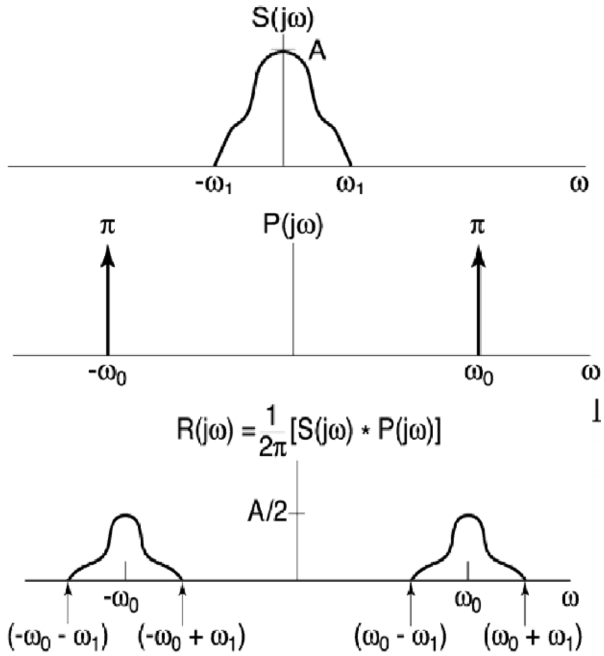
خاصیت ضرب

- مثال-برای $p(t) = \cos\omega_0 t$ و s(t) دلخواه داریم:

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

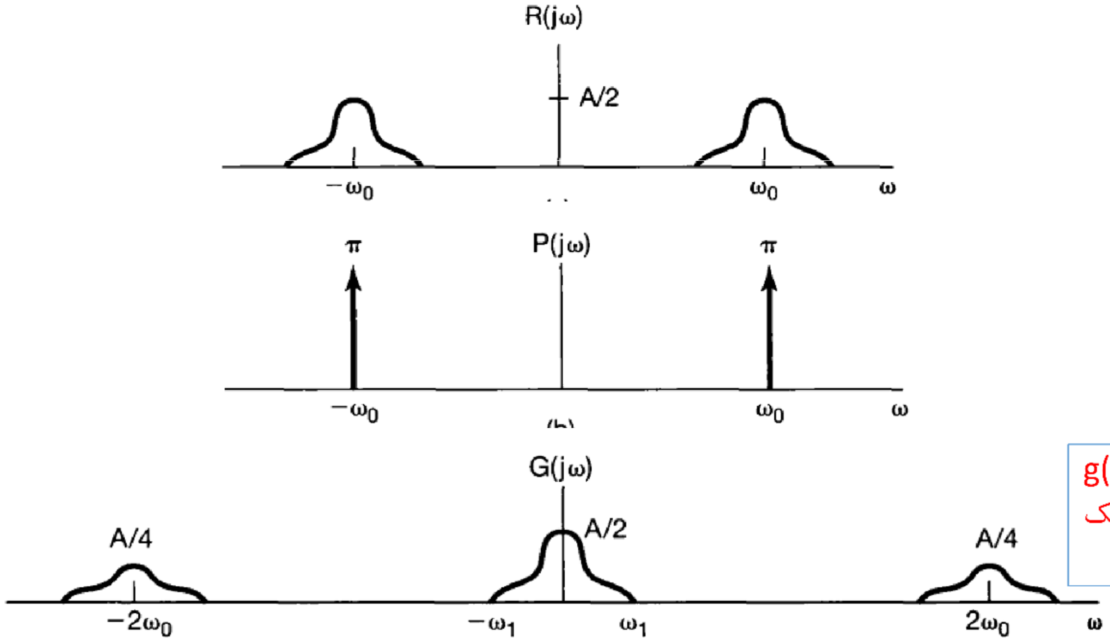
$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega) * \left(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)\right)\right]$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2}S(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}S(j(\omega+\omega_0))$$



خاصیت ضرب

- (ادامه مثال) حال اگر فرض کنیم: g(t) = r(t) p(t)



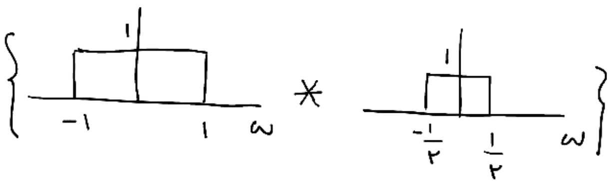
دیده میشود قسمت مرکزی طیف g(t) همان طیف سیگنال s(t) است (با یک اسکیل دامنه).

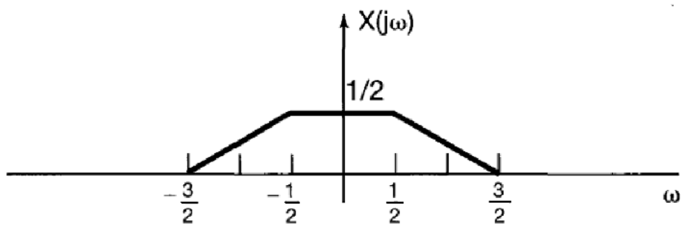
خاصیت ضرب

- مثال- تبدیل فوریه ضرب دو سینک $x(t) = \dfrac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$

$$x(t) = \pi\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right)$$

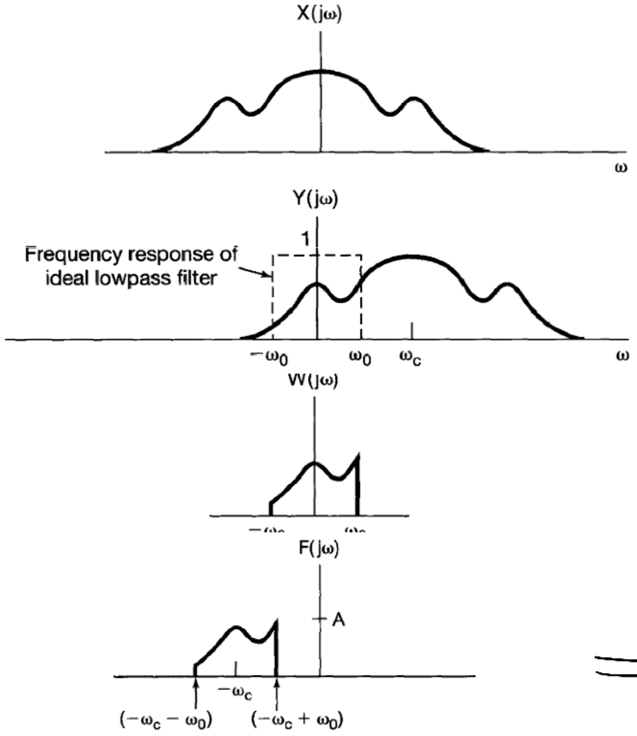
$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\left\{\frac{\sin(t)}{\pi t}\right\} * \mathfrak{F}\left\{\frac{\sin(t/2)}{\pi t}\right\} = \frac{1}{2}$$

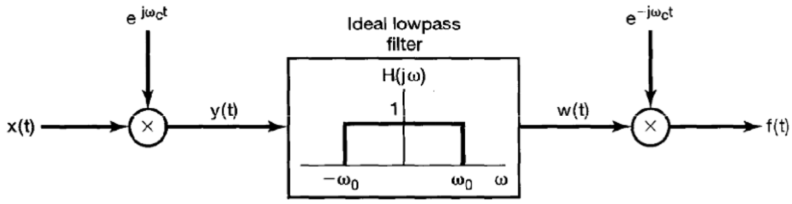




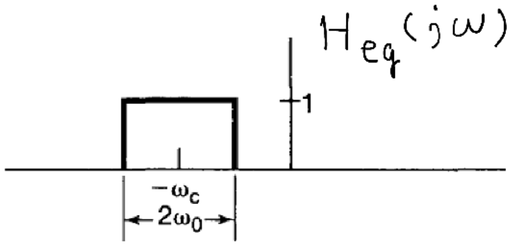
خاصیت ضرب

- مثال- تعیین پاسخ فرکانسی سیستم زیر:



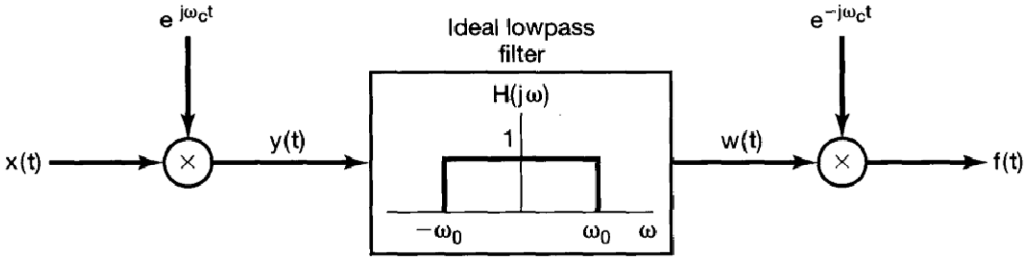


$\Longrightarrow$



خاصیت ضرب

ادامه مثال (تعیین پاسخ فرکانسی سیستم زیر):



$$y(t) = x(t)\, e^{j\omega_c t} \Rightarrow Y(j\omega) = X(j(\omega - \omega_c))$$

$$W(j\omega) = H(j\omega) \cdot Y(j\omega) = H(j\omega)\, X(j(\omega - \omega_c))$$

$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_c)) = \underbrace{H(j(\omega + \omega_c))}_{\text{پاسخ فرکانسی سیستم}} \cdot X(j\omega)$$

سیستم LCCDE

- سیستم LTI توصیف شده با معادله مشتقی خطی ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

میدانیم: $\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longleftrightarrow (j\omega)^k X(j\omega)$

پس:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}\right]}_{H(j\omega)} X(j\omega)$$

بنابراین پاسخ فرکانسی، یک تابع گویا برحسب $j\omega$ است.
با تجزیه به کسرهای جزیی میتوان h(t) را تعیین کرد.

- مثال- برای سیستم LTI پایدار توصیف شده بصورت زیر، پاسخ ضربه و پاسخ به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$ را تعیین کنید.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$\left((j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3\right) Y(j\omega) = (j\omega + 2) X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4j\omega + 3}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{j\omega+3} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2} \Rightarrow h(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

$$x(t) = e^{-t}u(t) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \Rightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = \frac{A_1}{j\omega+1} + \frac{A_2}{(j\omega+1)^2} + \frac{A_3}{j\omega+3}, \quad A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t}\right)u(t)$$

مثالهای تکمیلی

• مثال- تابع بسل مرتبه صفر $y(t)=J_0(t)$ در معادله دیفرانسیل $ty''+y'+ty=0$ صدق میکند. تبدیل فوریه تابع مزبور را محاسبه کنید. (بفرض وجود تبدیل فوریه و $\int_{-\infty}^{\infty} J_0(t)\,dt=1$)

$\mathcal{F}\{ty\} = j\frac{dY}{d\omega}$, $\mathcal{F}\{y'\} = j\omega Y(j\omega)$,

$$\mathcal{F}\{ty''\} = j\frac{d}{d\omega}\left(-\omega^2 Y(j\omega)\right) = j\left(-2\omega Y(j\omega) - \omega^2\frac{dY}{d\omega}\right)$$

$$\Rightarrow -j2\omega Y - j\omega^2 \frac{dY}{d\omega} + j\omega Y + j\frac{dY}{d\omega} = 0 \Rightarrow (1-\omega^2)\frac{dY}{d\omega} - \omega Y = 0$$

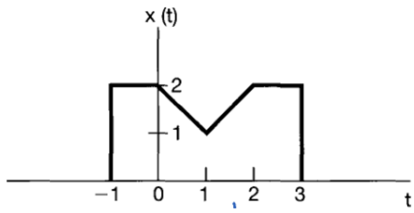
$$\Rightarrow \frac{dY}{Y} = \frac{\omega}{1-\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{1}{1+\omega}\right) \Rightarrow \ln Y = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-\omega) - \ln(1+\omega)\right) + C$$

$$\Rightarrow Y(j\omega) = K/\sqrt{1-\omega^2} \xrightarrow{Y(0)=1} Y(j\omega) = 1/\sqrt{1-\omega^2}$$

• مثال– سیگنال x(t) در شکل نشان داده شده است. مقادیر زیر را در مورد تبدیل فوریه سیگنال تعیین کنید.

$A = \sphericalangle X(j\omega)$, $B = X(j0)$, $C = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$,

$D = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$, $E = \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$



A تعیین

$y(t) = x(t+1)$:

$\updownarrow$

$Y(j\omega) = e^{j\omega} X(j\omega)$

$y(t)$ حقیقی وزوج است $\Rightarrow$ $Y(j\omega)$ حقیقی وزوج است

$\sphericalangle Y(j\omega) = 0$

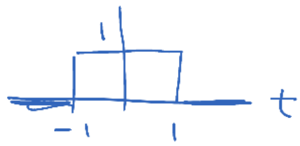
$$\sphericalangle Y(j\omega) = \sphericalangle e^{j\omega} + \sphericalangle X(j\omega) \Rightarrow \sphericalangle X(j\omega) = -\omega$$

$B = X(j0) = \int x(t)dt = 7$ و $C = 2\pi x(0) = 4\pi$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}}_{Z(j\omega)} e^{j2\omega}d\omega\,,\quad E = \int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega = ۲\pi\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^{۲}dt = ۲\pi(۸+\tfrac{۱۴}{۳}) = \frac{۷۶\pi}{۳}$$

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\omega)\, e^{j۲\omega}\, d\omega = ۲\pi\, z(t)\big|_{t=۲}$$

$r(t)$

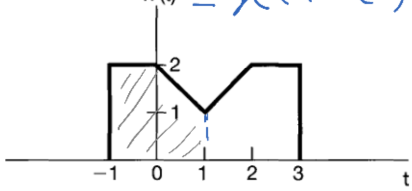


$$z(t) = x(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\,,$$

$$\Rightarrow z(۲) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\, x(۲-\tau)\, d\tau$$

$$= ۳,۵$$

$x(t) = x(۲-t)$



- مثال- در یک سیستم LTI، به ازای ورودی x(t) خروجی y(t) بصورت زیر حاصل شده است. مطلوبست پاسخ فرکانسی و پاسخ ضربه سیستم، معادله مشتقی حاکم بین ورودی و خروجی و پاسخ ضربه سیستم معکوس.

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t) \qquad\qquad y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t).$$

$$X(j\omega) = \frac{۱}{j\omega+۱} + \frac{۱}{j\omega+۳}\,,\quad Y(j\omega) = \frac{۲}{j\omega+۱} - \frac{۲}{j\omega+۴}$$

$$X(j\omega) = \frac{j۲\omega+۴}{(j\omega+۱)(j\omega+۳)}\,,\quad Y(j\omega) = \frac{۶}{(j\omega+۱)(j\omega+۴)}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{۳(j\omega+۳)}{(j\omega+۴)(j\omega+۲)} = \frac{۳/۲}{j\omega+۴} + \frac{۳/۲}{j\omega+۲}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{۳}{۲}\left(e^{-۴t}+e^{-۲t}\right)u(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{۳j\omega + ۹}{(j\omega)^{۲} + ۶(j\omega) + ۸} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$\Rightarrow (j\omega)^{۲} Y(j\omega) + ۶j\omega\, Y(j\omega) + ۸Y(j\omega) = ۳j\omega X + ۹X$$

$$\Rightarrow \frac{d^{۲}y}{dt^{۲}} + ۶\frac{dy}{dt} + ۸y = ۳\frac{dx}{dt} + ۹x(t)$$

$h_i(t) * h(t) = \delta(t)$

$\Downarrow$

$$H_i(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = \frac{(j\omega)^{۲} + ۶(j\omega) + ۸}{۳(j\omega + ۳)} = \frac{1}{۳}\left(j\omega + ۳ - \frac{1}{j\omega + ۳}\right)$$

$$\Rightarrow h_i(t) = \frac{1}{۳}\left(\delta'(t) + ۳\delta(t) - e^{-۳t}u(t)\right)$$

سیگنالها و سیستمها

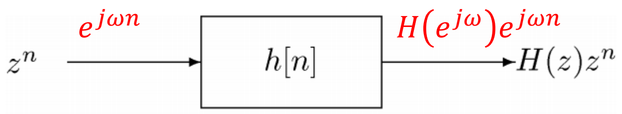
فصل پنجم: تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته
Discrete Time Fourier Transform (DTFT)
جلسه اول
تعریف، همگرایی، مثالها

1

2

چرا تبدیل فوریه؟

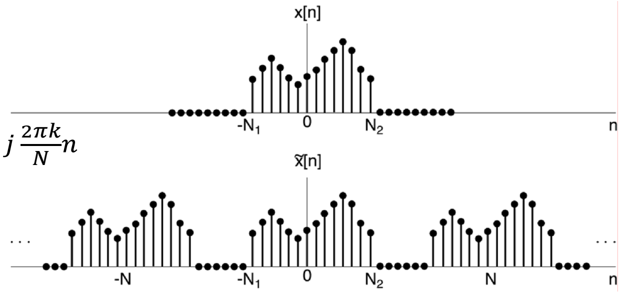
- سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega n}$ بعنوان سیگنال ویژه یک سیستم LTI گسسته



- سیگنال دلخواه x[n] را چگونه میتوان بر حسب سیگنالهای نمایی مختلط $e^{j\omega n}$ بیان کرد؟
- بیان فوق، چگونه ویژگیهای سیگنال را نمایش میدهد؟

تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه بعنوان حد ضرایب سری فوریه



$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n], & -N_1 \le n \le N_2 \\ x[n+N]\ , & otherwise \end{cases}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{j\frac{2\pi k}{N}n} = \frac{1}{N}\sum_n x[n]e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$\Longrightarrow Na_k = \left[\sum_n x[n]e^{j\,\omega n}\right]_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

$$\therefore X\left(e^{j\omega}\right) \triangleq \sum_n x[n]e^{j\,\omega n}$$

$$\tilde{x}[n] = x[n] \text{ for } any\ n \text{ as } N \to \infty \quad \Longrightarrow x[n] = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=<N>}\frac{2\pi}{N}X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \Longrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

تبدیل فوریه

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

– Analysis Equation
– FT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

– Synthesis Equation
– Inverse FT

- تناوب ضرایب سری فوریه، به تناوب تبدیل فوریه منجر شده است: $X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$
- فرکانسهای بالا در تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته، فرکانسهای حول $\pm\pi$ و هر مضرب فرد π است.

همگرایی

- دو شرط کافی برای همگرایی تبدیل فوریه (رابطه آنالیز)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$ — Finite energy

در اینحالت، ا نرژی خطا (خطا بین $X(e^{j\omega})$ و آنچه رابطه آنالیز ارائه میدهد) در حد، به سمت صفر میل میکند.

or

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ — Absolutely summable

در اینحالت، $X(e^{j\omega})$ یک تابع پیوسته از ω است.

- در رابطه سنتز، نگران همگرایی نیستیم.

مثال

- تبدیل فوریه ضربه

1) $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

2) $x[n] = \delta[n - n_0]$ - shifted unit sample

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

در سیگنال به طول محدود، نگران همگرایی نیستیم.

مثال

3) $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ - Exponentially decaying function　　سیگنال نمایی میراشونده

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(ae^{-j\omega})^n}_{|ae^{-j\omega}|<1}$$

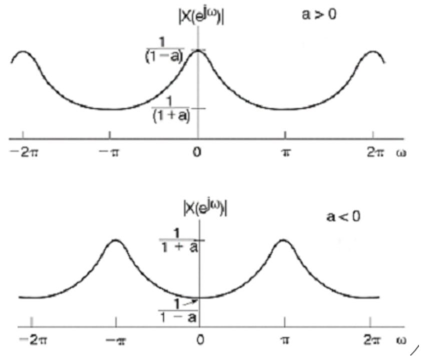
Infinite sum formula

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-a\cos\omega)+ja\sin\omega}$$

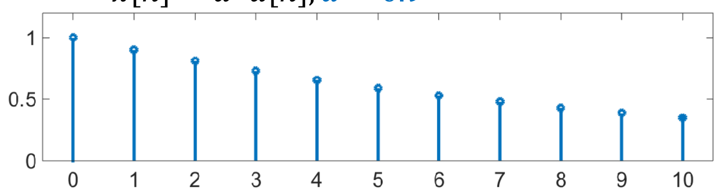
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

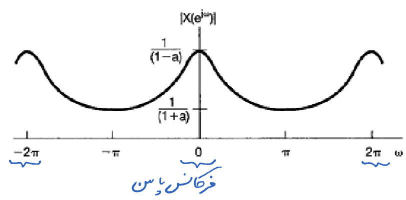
$$\omega = 0 : |X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a+a^2}} = \frac{1}{1-a}$$

$$\omega = \pi : |X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1+2a+a^2}} = \frac{1}{1+a}$$

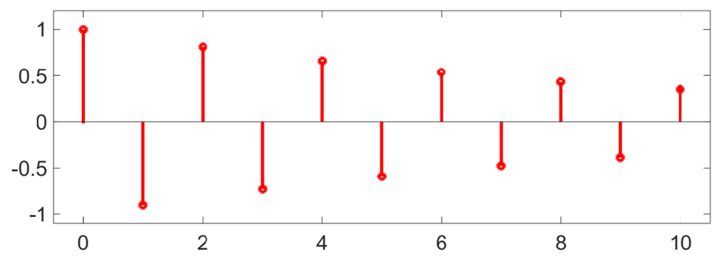


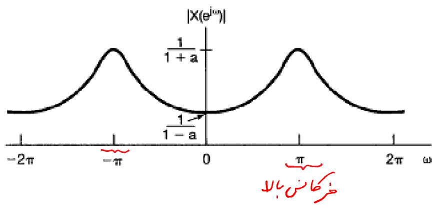
$x[n] = a^n u[n], a = 0.9$





$x[n] = a^n u[n], a = -0.9$

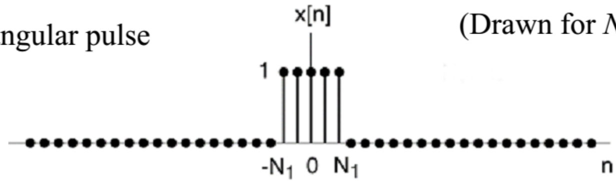




مثال

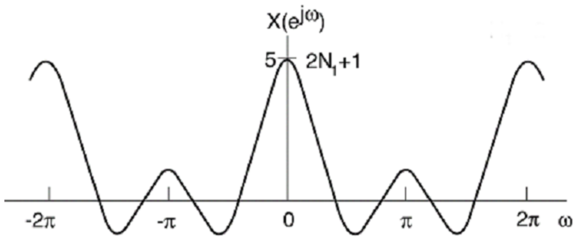
سیگنال پالس مستطیلی

4) DT Rectangular pulse (Drawn for $N_1 = 2$)



$$x[n] = \begin{cases} 1, & -N_1 \leq n \leq N_1 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

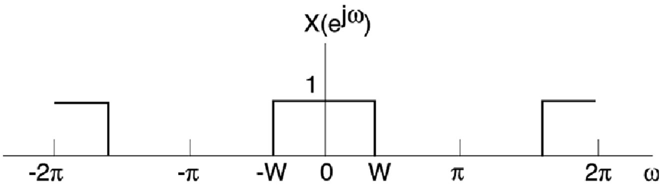
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-j\omega})^n = \frac{\sin \omega \left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} = X(e^{j(\omega - 2\pi)})$$



مثال

- تبدیل فوریه معکوس پالس

5)



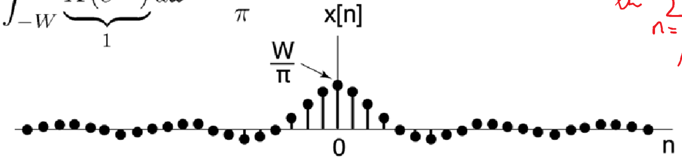
$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & W < \omega < \pi \end{cases}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W}{\pi} n\right)$$

نتیجه فرعی از همگرایی در نقطه $\omega = W$:

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin Wn}{\pi n} e^{-jWn} = \frac{1}{2}$$

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{1} d\omega = \frac{W}{\pi}$$



6) $x[n] = a^{|n|}, \qquad |a| < 1$

سیگنال نمایی میراشونده دوطرفه

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^m$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$
$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}.$$

مثال

- سیگنال نمایی سینوسی

7) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\frac{\pi}{3}n \; u(n)$

$$x(n) = \left[\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^n - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)^n\right] u(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}} - \frac{1}{2j}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\, e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}}$$

سیگنالها و سیستمها

فصل پنجم: تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

جلسه دوم

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب، خواص تبدیل فوریه سیگنال گسسته

(انتقال در زمان و فرکانس، مزدوج، مشتق فرکانسی)

1

2

تبدیل فوریه

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

– Analysis Equation
– FT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

– Synthesis Equation
– Inverse FT

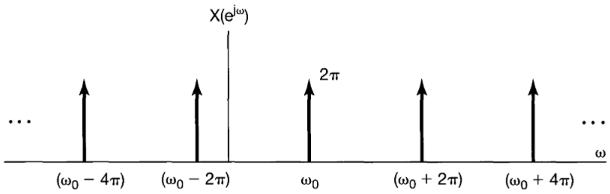
3

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب

- ابتدا تبدیل فوریه سیگنال نمایی مختلط $e^{j\omega_0 n}$ را تعیین میکنیم:

$$e^{j\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)\ ,\ \ -\pi < \omega < \pi$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}\} = 2\pi \sum_m \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m), for\ all\ \omega\ and\ \omega_0 \in \mathbb{R}$$



4

تبدیل فوریه سیگنالهای متناوب

- فرض کنید x[n] یک سیگنال متناوب با تناوب N و دارای نمایش سری فوریه زیر باشد:

$$k\omega_0 + 2\pi m = \frac{2\pi}{N}(mN+k) = \frac{2\pi}{N}k'$$

$$a_{k'} = a_{mN+k} = a_k$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\ ,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} a_k \left[2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi m)\right]$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

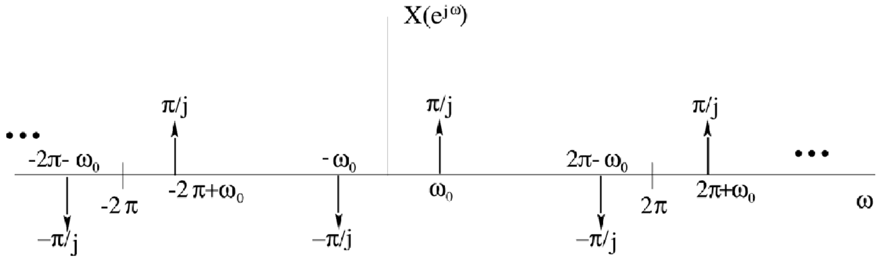
5

مثال

• تبدیل فوریه سیگنال سینوسی

$$x[n] = \sin\omega_0 n = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi m) - \frac{\pi}{j}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega+\omega_0-2\pi m)$$



6

مثال

• تبدیل فوریه سیگنال ثابت $x[n] = 1$:

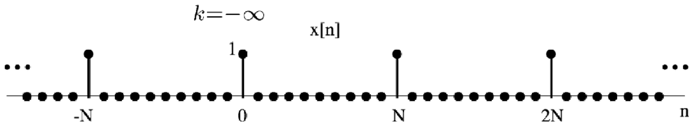
$$\mathrm{x[n]} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}|_{\omega_0=0} \Rightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\sum_m \delta(\omega-2\pi m)$$

یعنی تبدیل فوریه سیگنال ثابت، یک ضربه در $\omega = 0$ است (که با پریود 2π تکرار میشود).

مثال

- تبدیل فوریه قطار ضربه

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \qquad \omega_0 = 2\pi/N$$

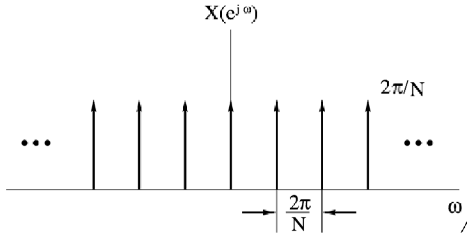


$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x[n]}_{=\delta[n]} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



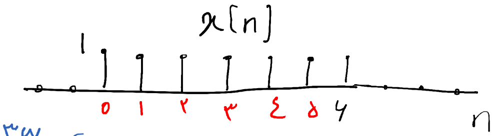
▪ تبدیل فوریه قطار ضربه، قطار ضربه است.

خواص

- متناوب بودن $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$
- خطی بودن $ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$
- انتقال در زمان $x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$

مثال- تبدیل فوریه سیگنال پالس غیر متقارن

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$



$$y[n] = x[n+3] \Rightarrow x[n] = y[n-3]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\sin\frac{7}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j3\omega}\frac{\sin\frac{7}{2}\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

9

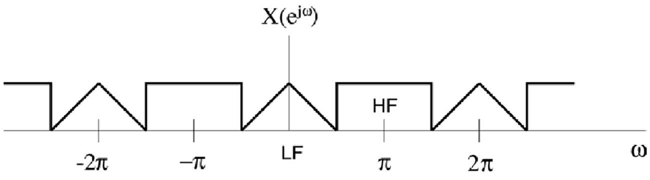
خواص- شیفت فرکانسی

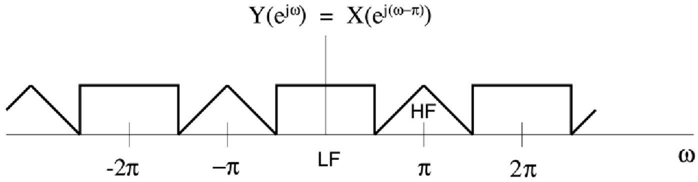
- انتقال در فرکانس $e^{j\omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$

مثال- اگر طیف سیگنال x[n] بصورت زیر باشد، طیف سیگنال $y[n] = (-1)^n x[n]$ را رسم کنید.

$y(n) = e^{j\pi n} x(n)$

$\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$





10

خواص- وارون زمانی و مزدوج

- وارون زمانی $x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$
- مزدوج سیگنال $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$
  - وقتی x[n] حقیقی است، آنگاه اندازه تبدیل فوریه، تابع زوج از ω و فاز تبدیل فوریه، تابع فرد از ω است:

$$|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})|, \measuredangle H(e^{-j\omega}) = -\measuredangle H(e^{j\omega})$$

  - وقتی x[n] حقیقی است، آنگاه قسمت حقیقی تبدیل فوریه، تابع زوج از ω و قسمت موهومی آن، تابع فرد از ω است:

$$Re\,[H(e^{-j\omega})] = Re[H(e^{j\omega})], \qquad Im[H(e^{-j\omega})] = -\mathrm{Im}[H(e^{j\omega})]$$

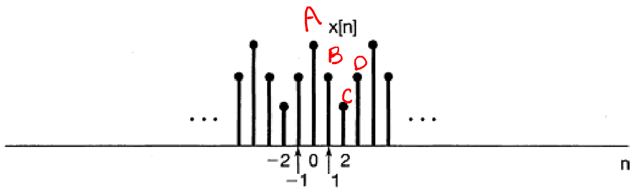
  - وقتی x[n] حقیقی و زوج است، تبدیل فوریه آن هم حقیقی و زوج است.
  - وقتی x[n] حقیقی و فرد است، تبدیل فوریه آن، موهومی خالص و فرد است.

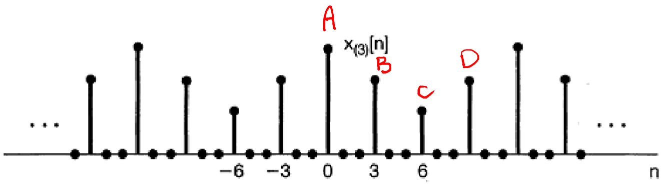
11

انبساط زمانی

- انبساط زمانی
  - تعریف:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k \\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k \end{cases}$$





12

خواص- انبساط زمانی

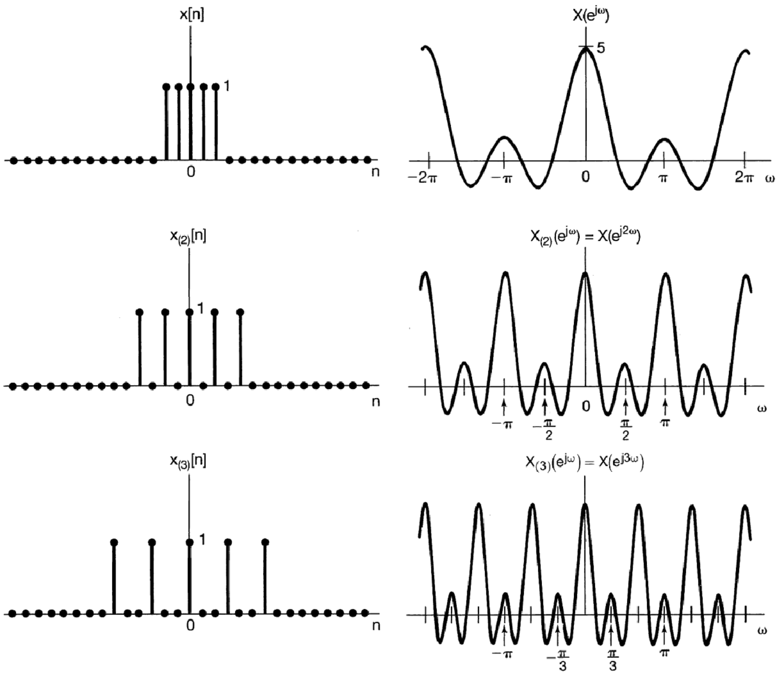
تبدیل فوریه انبساط زمانی: $x_{(k)}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{jk\omega})$

اثبات:

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}.$$

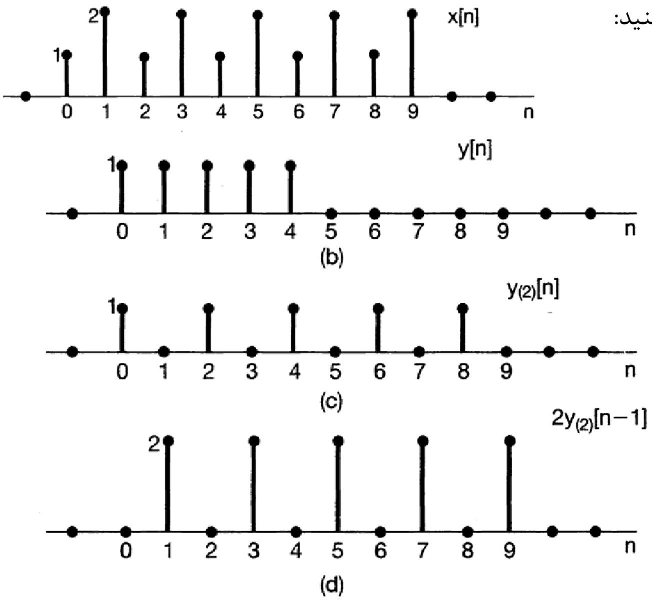
$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

مثال از تبدیل فوریه انبساط زمانی:



خواص- انبساط زمانی

- مثال- تبدیل فوریه سیگنال x[n] روبرو را پیدا کنید:



$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1],$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\frac{\sin\frac{5\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$y_{(2)}[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j4\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = Y(e^{j2\omega})$$

$$2y_{(2)}[n-1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} 2e^{-j5\omega}\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}(1+2e^{-j\omega})\left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}\right).$$

15

خواص- تفاضل و انباشت

- تفاضل و انباشت:

$$x[n] - x[n-1] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega}).$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$$

- مثال- تبدیل فوریه پله: $\mathcal{F}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k).$

16

خواص- مشتق در فرکانس

- مشتق در فرکانس $nx[n] \quad \leftrightarrow \quad j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

اثبات:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) = -j \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

- مثال- تبدیل فوریه معکوس $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}, |\alpha| < 1$

می‌دانیم: $\mathcal{F}\{\alpha^n u[n]\} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

$\Rightarrow \mathcal{F}\{n\alpha^n u[n]\} = j\frac{d}{d\omega}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \frac{-\alpha j^{2} e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{2}} \Rightarrow \mathcal{F}\{(n+1)\alpha^{n+\cancel{1}} u[n+1]\} = \frac{\cancel{\alpha}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{2}}$

$\Rightarrow x[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$

سیگنالها و سیستمها

فصل پنجم: تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

جلسه سوم

ادامه خواص تبدیل فوریه سیگنال گسسته (کانولوشن، ضرب)

تبدیل فوریه

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

– Analysis Equation
– FT

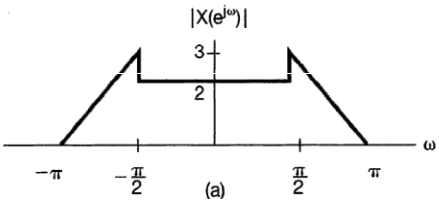
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

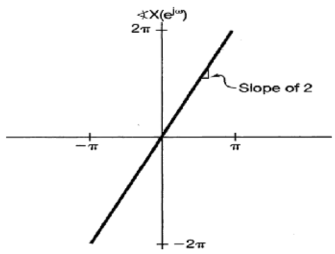
– Synthesis Equation
– Inverse FT

رابطه پارسوال

- رابطه پارسوال:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

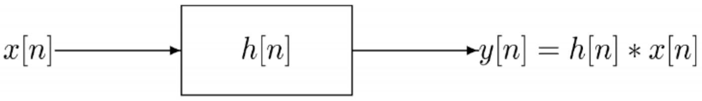




- مثال- تبدیل فوریه سیگنال x[n] در شکل نشان داده شده است. آیا سیگنال x[n]، یک سیگنال متناوب، حقیقی، زوج و یا انرژی محدود است؟

کانولوشن

- کانولوشن در زمان



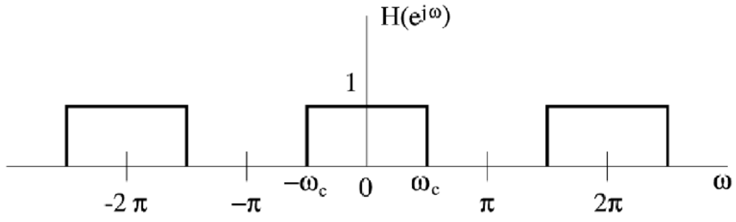
یعنی پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ تبدیل فوریه پاسخ ضربه است. $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

- مثال- پاسخ سیستم به ورودی نمایی مختلط $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

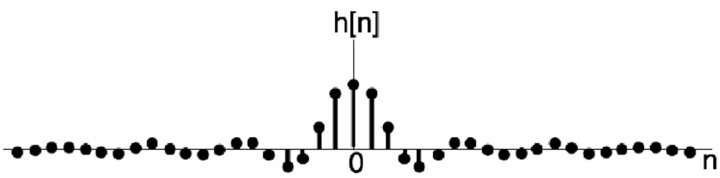
$$\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(e^{j(\omega_0 + 2\pi k)}) \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
&\overset{H \text{ Periodic}}{=} H(e^{j\omega_0}) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \quad \Rightarrow \quad y[n] = H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}$$

کانولوشن

- مثال- فیلتر پایین گذر ایده آل



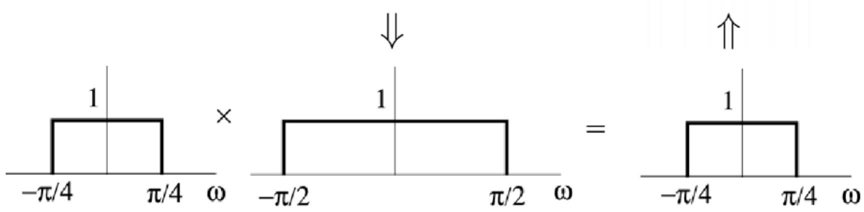
$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$



کانولوشن

- مثال- کانولوشن دو سیگنال سینک در زمان

$$\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} * \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$



کانولوشن

• مثال- کانولوشن دو سیگنال نمایی میراشونده $|\alpha|, |\beta| < 1$

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad x[n] = \beta^n u[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}, \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

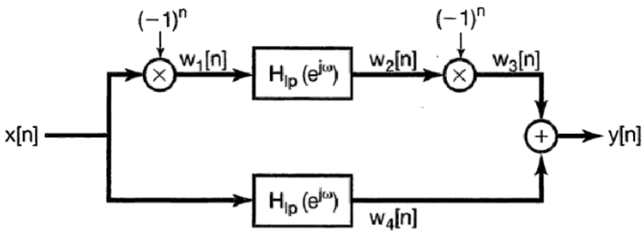
$$y[n] = h[n] * x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}\right)$$

$$\beta \neq \alpha : Y(e^{j\omega}) \overset{\text{PFE}}{=} \frac{A}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}} \Rightarrow y[n] = A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n]$$

$$\beta = \alpha : Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)^2 \Rightarrow y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

کانولوشن

مثال- پاسخ فرکانسی سیستم زیر را تعیین کنید که در آن، $H_{LP}(e^{j\omega})$ یک فیلتر پایینگذر ایده آل با فرکانس قطع $\frac{\pi}{4}$ است.



$$w_1[n] = e^{j\pi n}x[n] \Rightarrow W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$w_3[n] = e^{j\pi n}w_2[n] \Rightarrow W_3(e^{j\omega}) = W_2(e^{j(\omega-\pi)})$$

$$= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

$$= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

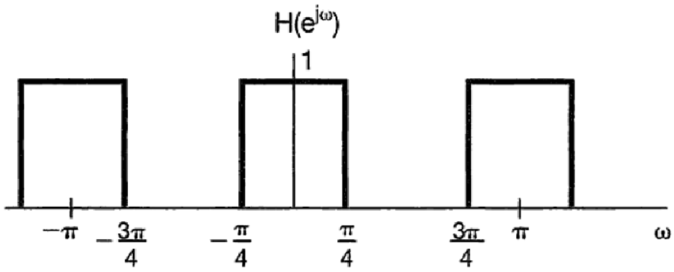
$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega})$$

$$= [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega})$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

کانولوشن

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$



ضرب

- ضرب

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$
$$\hookrightarrow \text{ Periodic Convolution}$$

- اثبات:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \cdot x_2[n] e^{-j\omega n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right) x_2[n] e^{-j\omega n}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} (X_1(e^{j\theta}) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\theta)})}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

ضرب

محاسبه کانولوشن متناوب: اگر انتگرالگیری را در بازه $-\pi$ تا π انجام دهیم:

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{aligned}$$

که در آن:

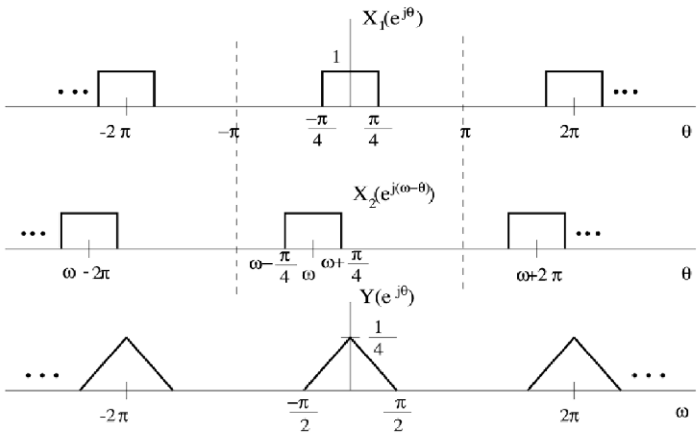
$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \begin{cases} X_1(e^{j\theta}), & |\theta| \le \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

یعنی کانولوشن متناوب دو سیگنال برابر کانولوشن معمولی یکی از آنها با یک دوره تناوب از سیگنال دوم است.

ضرب

- مثال- تبدیل فوریه سیگنال $y[n] = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}\right)^2$؟

$$y[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right)^2 = x_1[n]\cdot x_2[n], \quad x_1[n] = x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$



$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$

سیگنالها و سیستمها

فصل پنجم: تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

جلسه چهارم

دوگانی در تحلیل فوریه، سیستم های LCCDE

تبدیل فوریه

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

– Analysis Equation
– FT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

– Synthesis Equation
– Inverse FT

دوگانی در تحلیل فوریه

- دوگانی در تبدیل فوریه زمان پیوسته (CTFT): بعد زمان و فرکانس هر دو پیوسته و غیرپریودیک هستند

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

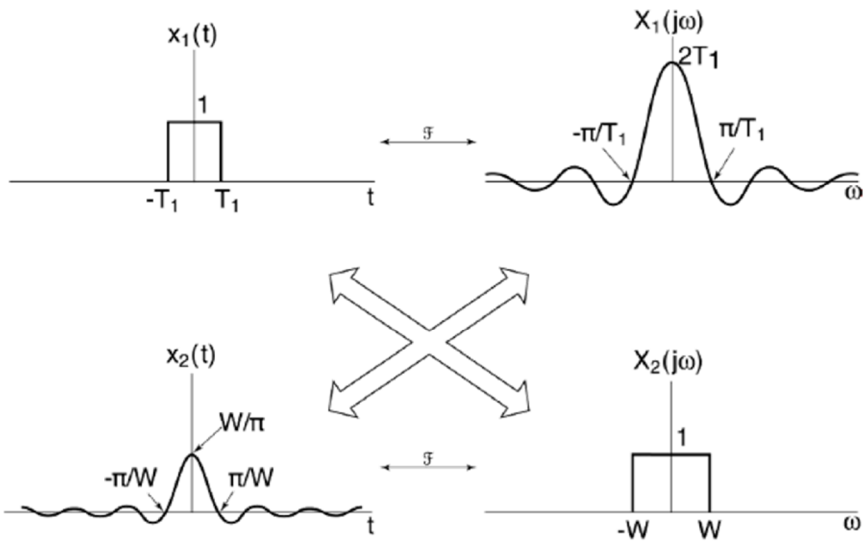
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t)\} = g(\omega) \iff \mathcal{F}\{g(t)\} = 2\pi\, x(-\omega)}$$

دوگانی در تحلیل فوریه

مثالی از دوگانی CTFT



سری فوریه گسسته در زمان DTFS

- گسسته و پریودیک در بعد زمان ↔ گسسته و پریودیک در بعد فرکانس

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = x[n+N], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = a_{k+N}$$

- دوگانی در DTFS

$$\boxed{g[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} f[k] \quad \Longleftrightarrow \quad f[n] \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]}$$

- مثال- سیگنال x[n] با پریود N=9 بصورت زیر تعریف شده است. ضرایب سری فوریه آن را تعیین کنید:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi n/9)}{\sin(\pi n/9)}, & n \neq \text{multiple of } 9 \\ \frac{5}{9}, & n = \text{multiple of } 9 \end{cases}$$

- میدانیم یک پالس مستطیلی متناوب دارای ضرایب سری فوریه مانند سیگنال فوق خواهد بود:

$$g[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq 2 \\ 0, & 2 < |n| \leq 4 \end{cases} \quad \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} \quad b_k = \begin{cases} \frac{1}{9} \frac{\sin(5\pi k/9)}{\sin(\pi k/9)}, & k \neq \text{multiple of } 9 \\ \frac{5}{9}, & k = \text{multiple of } 9 \end{cases}$$

پس ضرایب سری فوریه سیگنال x[n] برابر است با:

$$a_k = \begin{cases} 1/9, & |k| \leq 2 \\ 0, & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

دوگانی بین سری فوریه سیگنال پیوسته (CTFS) و تبدیل فوریه سیگنال گسسته DTFT

- CTFS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = x(t+T), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

گسسته در فرکانس ⇔ پریودیک در زمان

- DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

پریودیک در فرکانس ⇔ گسسته در زمان

دوگانی بین CTFS و DTFT

فرض کنید x(t) یک سیگنال متناوب با تناوب 2π و ضرایب سری فوریه a_k باشد

$$x(t) \xleftrightarrow{fs} a_k \Leftrightarrow f[n] = a_n \xleftrightarrow{DTFT} x(-\omega)$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_k a_k e^{jkt} \Rightarrow x(-\omega) = \sum_n a_n e^{-j\omega n}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$\Rightarrow x(-\omega) = \sum_n f[n] e^{-j\omega n}$$

$$\Rightarrow x(-\omega) = \mathcal{F}\{f[n]\}$$

- مثال- تبدیل فوریه سیگنال x[n] را پیدا کنید: $x[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$
- میدانیم سیگنال g(t) با پریود 2π به ازای $T_1 = \frac{\pi}{2}$،دارای ضرایب سری فوریه $a_k = x[k]$ است:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \le \pi \end{cases}$$

پس تبدیل فوریه x[n] برابر $g(-\omega)$ خواهد شد، یعنی:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

سیستمهای گسسته LCCDE

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- با اعمال تبدیل فوریه و با توجه به $x[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$ داریم:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}\right]}_{H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega})$$

— Rational function of $e^{-j\omega}$, use PFE to get $h[n]$

$y(n) = h(n) * x(n)$

$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$

$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$

- مثال- یک سیستم LTI علی با معادله تفاضلی مرتبه اول زیر توصیف شده است. پاسخ ضربه سیستم و پاسخ ضربه سیستم معکوس را تعیین کنید:

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

محاسبه پاسخ ضربه سیستم

$$(1 - \alpha e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

پاسخ ضربه سیستم معکوس:

$$h(n) * h_I(n) = \delta[n]$$

$$H(e^{j\omega}) \cdot H_I(e^{j\omega}) = 1 \Rightarrow H_I(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

$$\Rightarrow H_I(e^{j\omega}) = 1 - \alpha e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow h_I[n] = \delta[n] - \alpha\delta[n-1]$$

- مثال- در سیستم LTI علی مرتبه دوم زیر، پاسخ ضربه سیستم را تعیین کنید:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Rightarrow h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

- مثال- در سیستم مثال قبل، پاسخ به ورودی $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ را تعیین کنید.

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})}\right]\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right]$$

$$= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-e\omega})^2}$$

ضرب در $2\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}s}\right) = \frac{2\times 1/2}{(1-\frac{1}{2}s)^2} \xrightarrow{s=4} \frac{1\times 2}{2} = 1$

ضرب در $B_{11}(-\frac{1}{4}) = 1 \Rightarrow B_{11} = -4$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \qquad B_{11} = -4, \quad B_{12} = -2, \quad B_{21} = 8,$$

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$y[n] = \left\{-4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} u[n]$$

- مثال- اطلاعات زیر درمورد سیگنال حقیقی x[n] داده شده است. سیگنال را تعیین کنید:

1. $x[n] = 0$ for $n > 0$.
2. $x[0] > 0$.
3. $\mathcal{Im}\{X(e^{j\omega})\} = \sin\omega - \sin 2\omega$.
4. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 3$.

$$Im\{X(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2j}\left(X(e^{j\omega}) - X^*(e^{j\omega})\right)$$

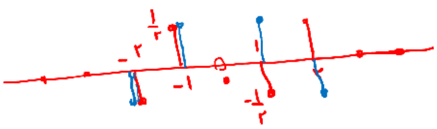
$$\mathcal{F}^{-1}\{Im\{X(e^{j\omega})\}\} = \frac{1}{2j}\left(x(n) - x^*(-n)\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\sin\omega - \sin 2\omega\} = \frac{1}{2j}\left(x(n) - x(-n)\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{+j2\omega} + e^{-j2\omega}\right)\right\} = \frac{1}{\cancel{2j}}\left(\delta(n+1) - \delta(n-1) - \delta(n+2) + \delta(n-2)\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2j}}\left(x(n) - x(-n)\right)$$

$$x(n) = x_o(n) + x_e(n)$$



$$\Rightarrow x(n)\Big|_{n=-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad , \quad x(n)\Big|_{n=-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \cancel{-1} \; -1$$

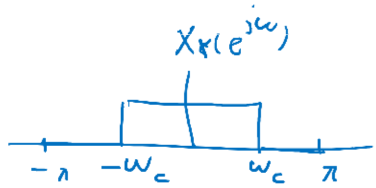
$$4 \rightarrow \sum_n |x(n)|^2 = 3 \Rightarrow 1 + 1 + |x(0)|^2 = 3 \Rightarrow x(0) = 1 \Rightarrow x(n) = \delta(n) + \delta(n+1) - \delta(n+2)$$

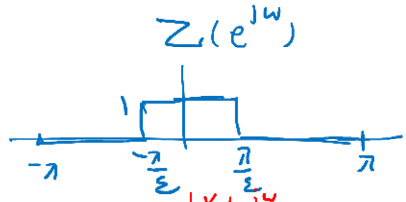
• مثال- اگر $y[n] = \underbrace{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2}_{x_1(n)} * \underbrace{\left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right)}_{x_2(n)}$, باشد، به ازای چه مقادیری از ω_c خواهیم داشت:

$$y[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2$$

$$Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})\, X_2(e^{j\omega})$$

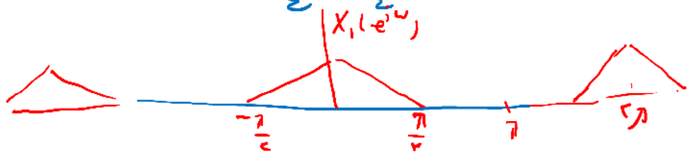
$$= \begin{cases} X_1(e^{j\omega}), & |\omega|<\omega_c \\ 0, & \omega_c<|\omega|<\pi \end{cases}$$





$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\, Z(e^{j\omega}) \circledast Z(e^{j\omega})$$

$$\frac{\pi}{2} < \omega_c < \pi \quad \Leftarrow$$



• مثال- در یک سیستم LTI علی و پایدار، داریم: $\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n] \longrightarrow n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$

پاسخ ضربه سیستم و معادله تفاضلی حاکم بر سیستم را تعیین کنید.

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

$$Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{n\left(\tfrac{4}{5}\right)^n u(n)\right\} = \mathcal{F}\left\{(n+1)\left(\tfrac{4}{5}\right)^n u(n) - \left(\tfrac{4}{5}\right)^n u(n)\right\} = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} - 1 \Rightarrow h(n) = \left(\tfrac{4}{5}\right)^n u(n) - \delta(n)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\frac{4}{5}e^{-j\omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{4}{5}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = \frac{4}{5}e^{-j\omega}X(e^{j\omega})$$

$$y(n) - \frac{4}{5}y(n-1) = \frac{4}{5}x(n-1)$$

سیگنالها و سیستمها

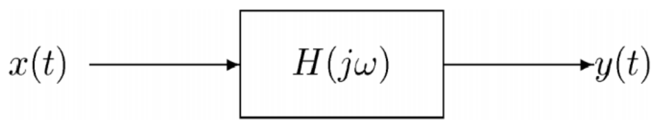
فصل ششم: فیلترها، مفاهیم اولیه

Filters

جلسه اول

فیلتر (سیستم)

- پاسخ فرکانسی



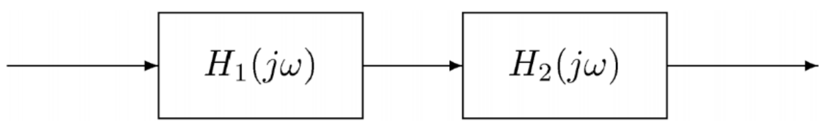
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)|$$

or $$\log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)| + \log|X(j\omega)|$$

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

Cascading:



$$\left.\begin{array}{c} \log|H(j\omega)| = \log|H_1(j\omega)| + \log|H_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) \end{array}\right\} \text{Easy to add}$$

فیلتر (سیستم)

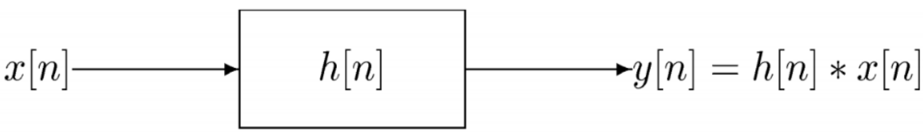
- در سیستم های حقیقی، بدلیل خواص تقارن، کافیست پاسخ فرکانسی به ازای فرکانس های مثبت دراختیار باشد:

$$\begin{aligned} |H(-j\omega)| &= |H(j\omega)| \\ \angle H(-j\omega) &= -\angle H(j\omega) \end{aligned}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log|H(j\omega)|$$

$$\begin{array}{lcr} |H(j\omega)| = 1 & \longrightarrow & 0\,\mathrm{dB} \\ |H(j\omega)| = \sqrt{2} & \longrightarrow & \sim 3\,\mathrm{dB} \\ |H(j\omega)| = 2 & \longrightarrow & \sim 6\,\mathrm{dB} \\ |H(j\omega)| = 10 & \longrightarrow & 20\,\mathrm{dB} \\ |H(j\omega)| = 100 & \longrightarrow & 40\,\mathrm{dB} \end{array}$$

فیلتر (سیستم)



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- مثال- پاسخ سیستم به ورودی $x[n] = \sin(\omega_0 n + \phi_0)$

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})| \sin(\omega_0 n + \varphi_0 + \underbrace{\angle H(e^{j\omega_0})}_{-\alpha_0})$$

$$= |H(e^{j\omega_0})| \sin\left[\omega_0\left(n - \frac{\alpha_0}{\omega_0}\right) + \varphi_0\right]$$

فاز خطی و غیر خطی

- اعوجاج فاز: تغییرات ناخواسته ای که فاز پاسخ فرکانسی سیستم روی سیگنال اعمال میکند.

$|H(j\omega)|$: رفتار مطلوب ما را داشته باشد

$\measuredangle H(j\omega) = 0$ عموما خواسته ما از فیلتر است

$\measuredangle Y(j\omega) = \measuredangle X(j\omega) + \measuredangle H(j\omega)$

فرض:

$\measuredangle H(j\omega) = -\alpha\omega \ , \ |H(j\omega)| = 1$

$x(t) \rightarrow \boxed{H(j\omega)} \rightarrow y(t)$

$H(j\omega) = e^{-j\alpha\omega} \Longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)\, e^{-j\alpha\omega}$

$y(t) = x(t-\alpha)$

در اینجا اعوجاج فاز قابل تحمل است.

مثال: $x(t) = \sin\omega_1 t + 2\sin\omega_2 t$

$|H(j\omega)| = 1 \ , \ \measuredangle H(j\omega)$ دلخواه

$y(t) = \sin(\omega_1 t + \measuredangle H(j\omega_1)) + 2\sin(\omega_2 t + \measuredangle H(j\omega_2))$

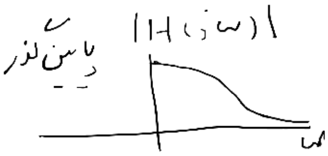
$= \sin[\omega_1(t-\alpha_1)] + 2\sin[\omega_2(t-\alpha_2)]$

وقتی فاز سیستم خطی باشد آنگاه $y(t)$ شیفت یافته $(\alpha_1=\alpha_2)$ $x(t)$ است در غیر اینصورت اعوجاج فاز مسئله دار است.

انواع فیلترها

- فیلتر شکل دهنده طیف

اندازه پاسخ فرکانسی، تقریبا برابر یک تابع مشخصی (وابسته به مساله) است.

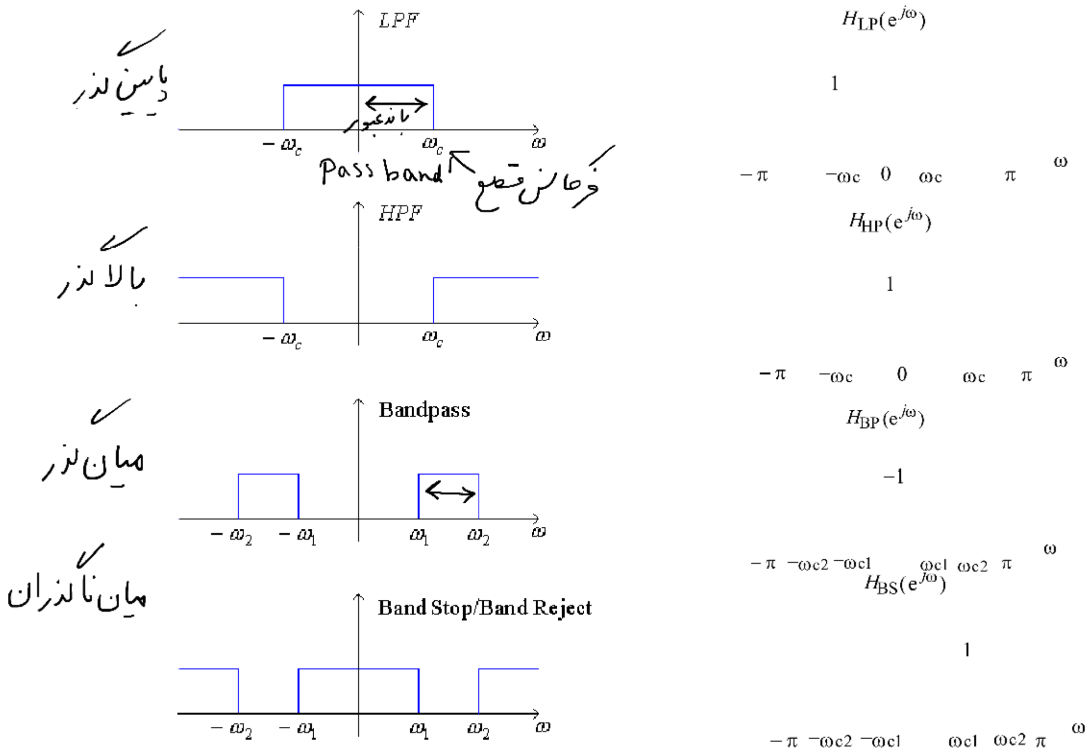


- فیلتر انتخابگر فرکانس (Frequency selective filters)
  - بخشی از باند فرکانسی را عبور و بخشی را حذف یا تضعیف میکند.

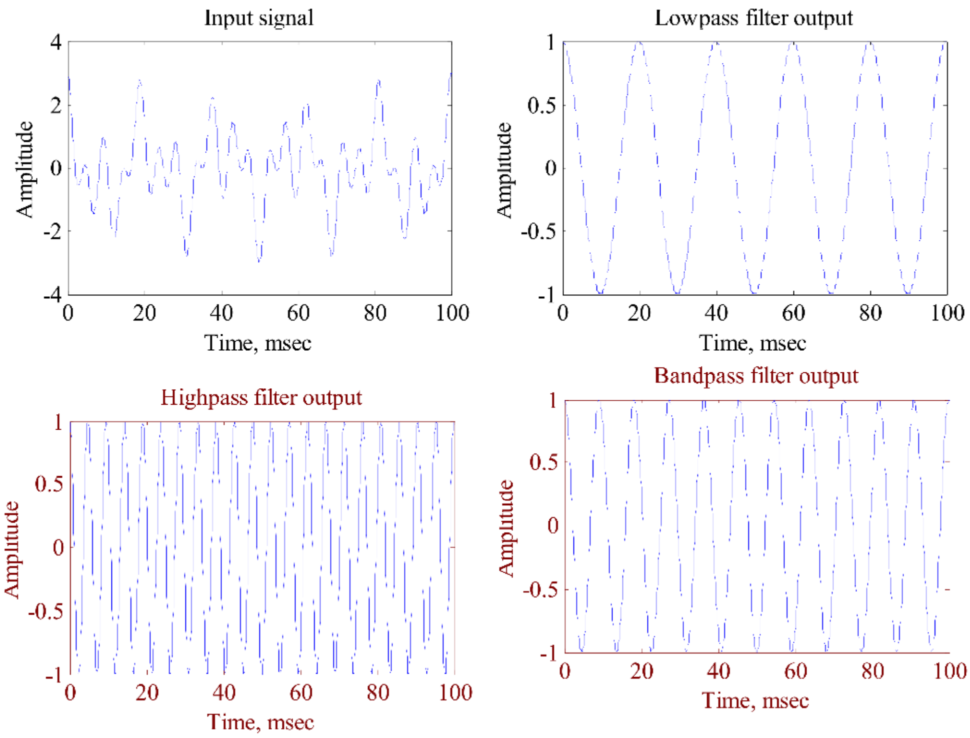
- **فیلتر انتخابگر ایده آل**: در باند عبور، مقدار پاسخ فرکانسی، برابر یک و در خارج آن برابر صفر است.
  - فاز پاسخ فرکانسی همواره صفر است.

$H(j\omega) = 1$ $\qquad H(j\omega) = 0$

فیلترهای ایده آل

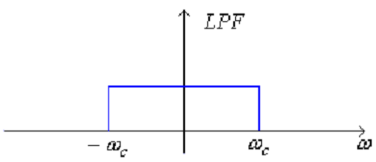


فیلتر

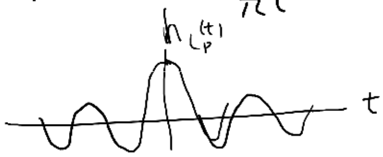


- مثال- سیگنال ورودی شامل سه سیگنال سینوسی در فرکانسهای ۵۰، ۱۱۰ و ۲۱۰ هرتز است.

• ویژگیهای فیلتر پایین گذر ایده آل:



$$h_{lp}(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$



۱- غیرعلّی ← فاز صفر

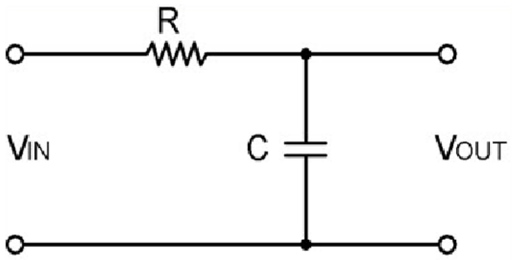
۲- ناپایدار $\int_{-\infty}^{\infty} |h_{lp}(t)|\, dt = \infty$

۳- درجه سیستم (پیچیدگی) خیلی بالاست

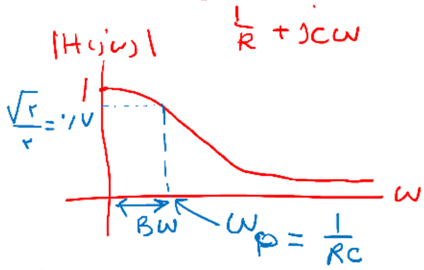
۴- عدم ضرورت درعمل

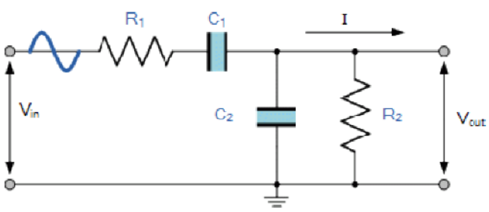
فیلترهای عملی

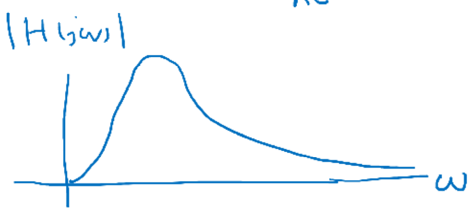
• مثال ۱- مدار RC



$$H(j\omega) = \frac{1/R}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



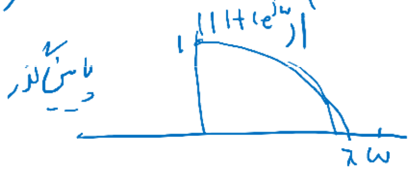




- مثال ۲- میانگین گیر لغزان (FIR)

$$y(n) = \frac{1}{3}\left(x(n) + x(n-1) + x[n-2]\right)$$

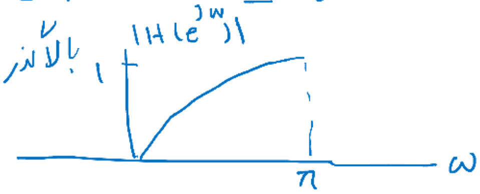
$$y(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + x(n-1)\right) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-j\omega}\right) = \frac{2}{2} e^{-j\frac{\omega}{2}} \cos\frac{\omega}{2}$$



- مثال ۳- تفاضل مرتبه اول (FIR)

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

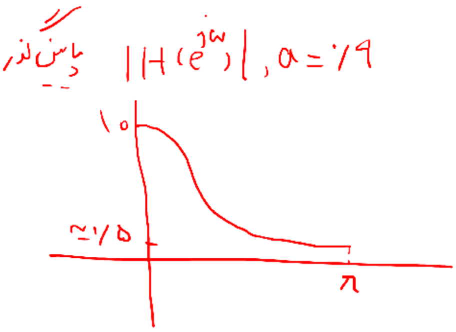
$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = 2j\, e^{-j\frac{\omega}{2}} \sin\frac{\omega}{2}$$

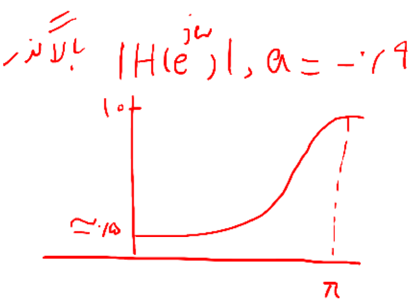


- مثال ۴- فیلتر IIR

$$y(n) - a\,y(n-1) = x(n)$$

$$h(n) = a^n u(n) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$





- مثال- فرض کنید x(t) سیگنالی باند محدود به ω_0 است (یعنی $|X(j\omega)| = 0$,$|\omega| > \omega_0$). سیگنال y(t) که بصورت زیر تعریف شده، در اختیار است. چگونه از روی آن میتوان سیگنال x(t) را بازیابی کرد؟

$$y(t) = x(t) + x^2(t)\cos(4\omega_0 t)$$

سیگنالها و سیستمها

فصل هفتم: نمونه برداری

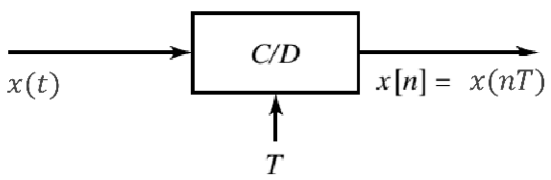
Sampling

جلسه اول

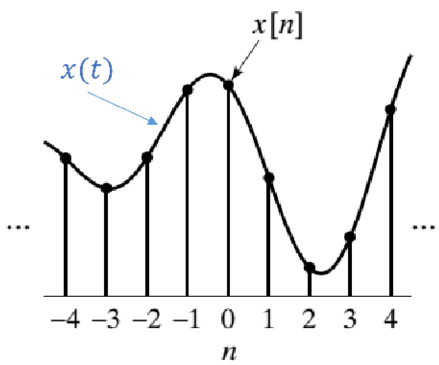
تعریف، مدلسازی، قضیه نمونه برداری نایکویست

نمونه برداری

- نمونه برداری: فرایند ایجاد سیگنال گسسته از یک سیگنال پیوسته
- ضرورت: امکان پردازش بهتر، هزینه پردازش کمتر، نگهداری
- نمونه برداری یکنواخت: $x[n] = x(nT)$



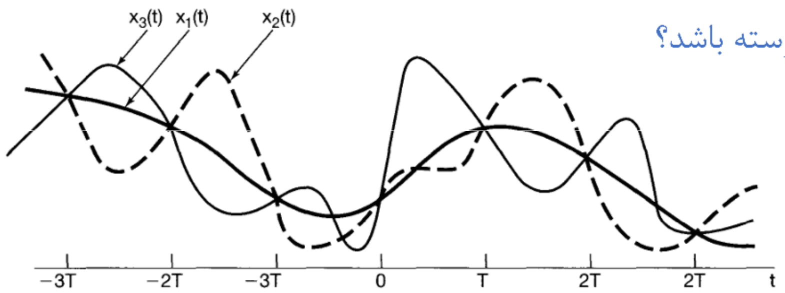
در این حالت، سیگنال گسسته، نمونه های سیگنال پیوسته در فواصل زمانی یکسان T است.



- T را پریود نمونه برداری و $f_S = \frac{1}{T}$ را نرخ نمونه برداری گویند.

نمونه برداری

- مساله (مشکل): یک سیگنال گسسته یکسان، ممکن است از نمونه برداری از چند سیگنال پیوسته متفاوت ایجاد شود.
- به بیان دیگر، بخشی از محتویات سیگنال پیوسته ممکن است از دست برود!



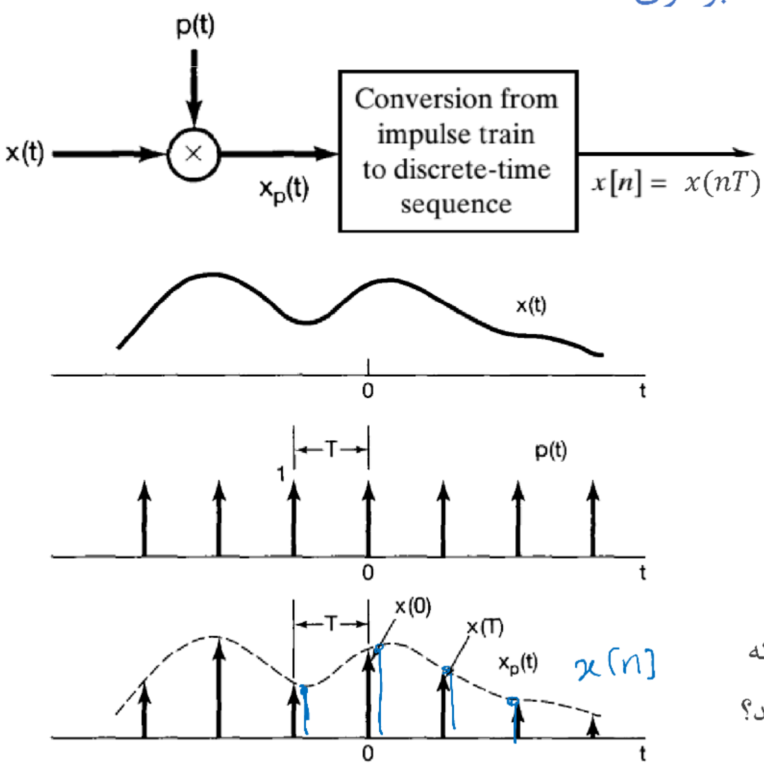
چه کنیم که یک سیگنال گسسته، نماینده کامل سیگنال پیوسته باشد؟

- وقتی محتویات سیگنال پیوسته از دست نمیرود، امکان بازیابی سیگنال پیوسته از روی نمونه های آن وجود خواهد داشت.
- راه حل ابتدایی: هر چه میتوانیم T را کوچک کنیم. اما ....

- سوال: مقدار T را تا کجا میتوان افزایش داد بگونه ای که کماکان، سیگنال گسسته نماینده کامل سیگنال پیوسته باشد؟

نمونه برداری

- مدلسازی نمونه برداری



$$x_p(t) = x(t)p(t),$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT).$$

$$x_p(t) = x(t) \sum_n \delta(t-nT)$$

$$= \sum_n x(t)\delta(t-nT) = \sum_n \underbrace{x(nT)}_{x[n]} \delta(t-nT)$$

- سوال جدید: مقدار T را تا کجا میتوان افزایش داد بگونه ای که کماکان، سیگنال $x_p(t)$ نماینده کامل سیگنال پیوسته باشد؟

5

تحلیل ریاضی

- تحلیل در حوزه فرکانس

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$\text{Multiplication Property} \Rightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \text{Sampling Frequency}$$

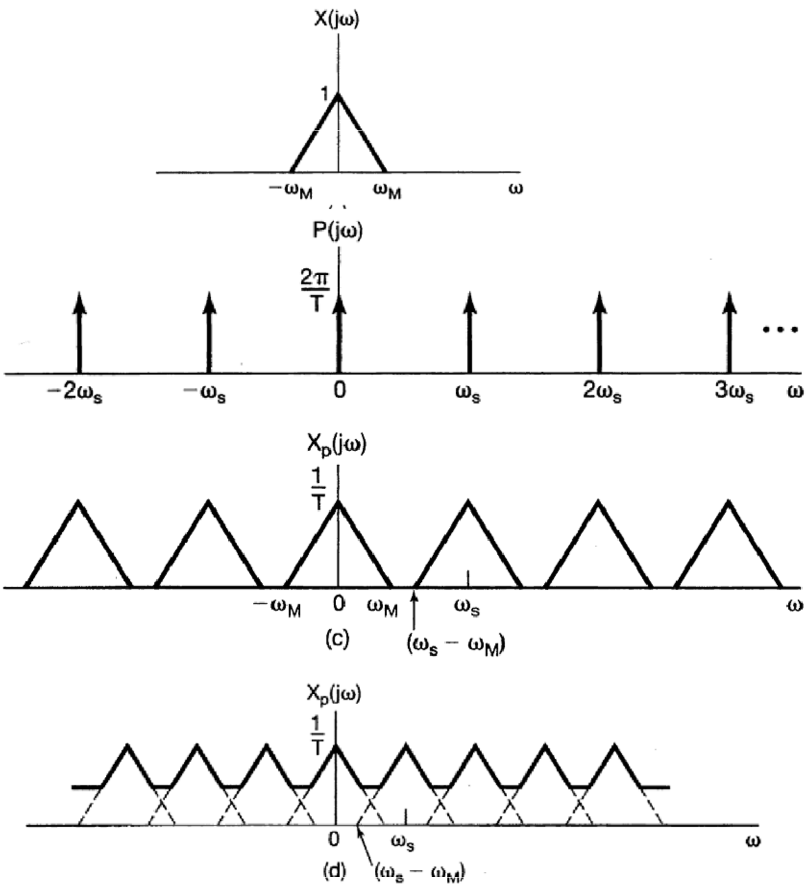
Important to note: $\omega_s \propto 1/T$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

6

- طیف سیگنال $x_p(t)$



$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k} X(j(\omega - k\omega_s))$

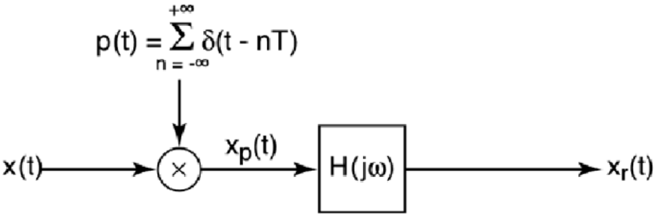
$\omega_M < \omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s > ۲\omega_M$

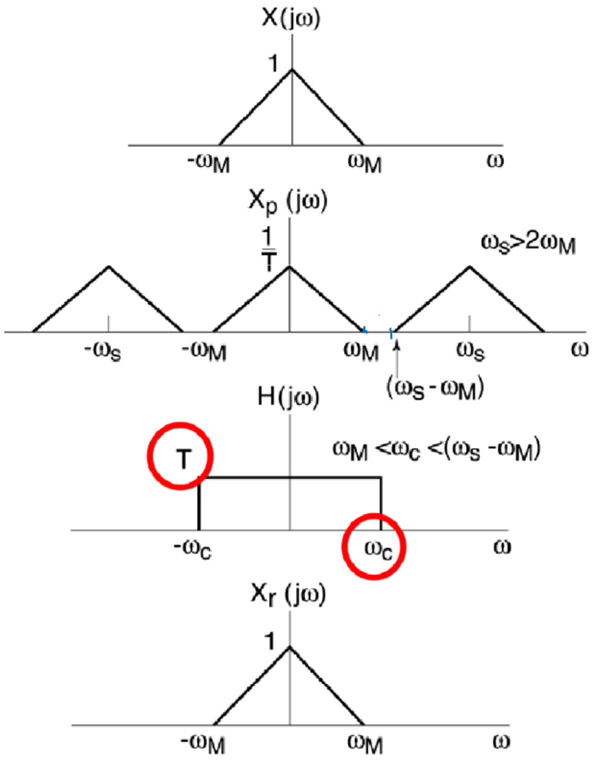
$\omega_M > \omega_s - \omega_M \Rightarrow \omega_s < ۲\,\omega_M$

aliasing همپوشانی طیفی

بازسازی سیگنال پیوسته

•

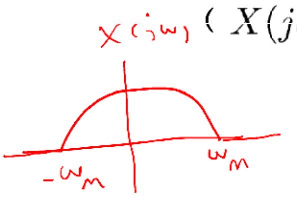




$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

قضیه نمونه برداری نایکویست

- فرض کنید که x(t) یک سیگنال با باند محدود باشد (یعنی $X(j\omega) = 0 \quad \text{for} \quad |\omega| > \omega_M$)



آنگاه x(t) را می‌توان بصورت یکتا بر حسب نمونه های آن {x(nT)} بدست آورد اگر:

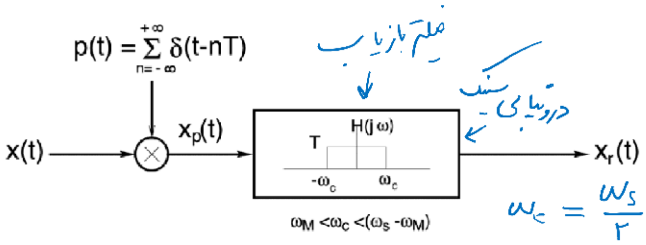
$$\omega_s > 2\omega_M = \text{The Nyquist rate}$$

که : $\omega_s = 2\pi/T$

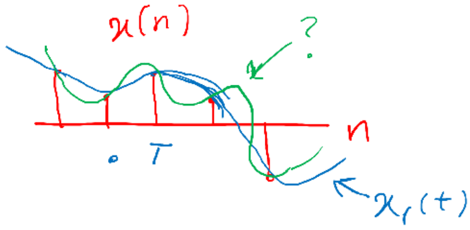
$\Rightarrow T < \frac{\pi}{\omega_M}$

- نمونه برداری مطرح شده تا بحال را نمونه برداری ضربه میگویند.

تعبیر زمانی بازیابی سیگنال از روی نمونه هایش



$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

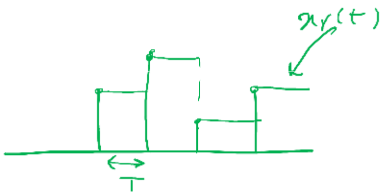


$$
\begin{aligned}
x_r(t) &= x_p(t) * h(t) \quad , \quad \text{where } h(t) = \frac{T \sin \omega_c t}{\pi t} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right) * h(t) = \sum x(nT)\,\delta(t-nT) * h(t) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T\sin[\omega_c(t-nT)]}{\pi(t-nT)}
\end{aligned}
$$

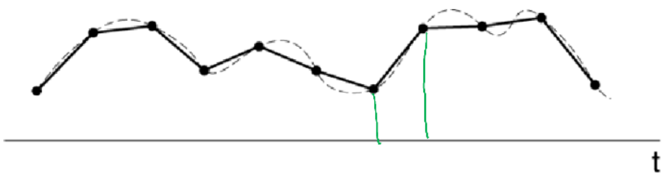
$$x_r(t)\Big|_{t=mT} = \sum_n x(nT)\frac{\cancel{T}\sin[\omega_c(m-n)T]}{\pi(m-n)\cancel{T}} = \sum_n x(nT)\frac{\sin(\pi(m-n))}{\pi(m-n)} = x(mT)$$

تعبیر زمانی ...

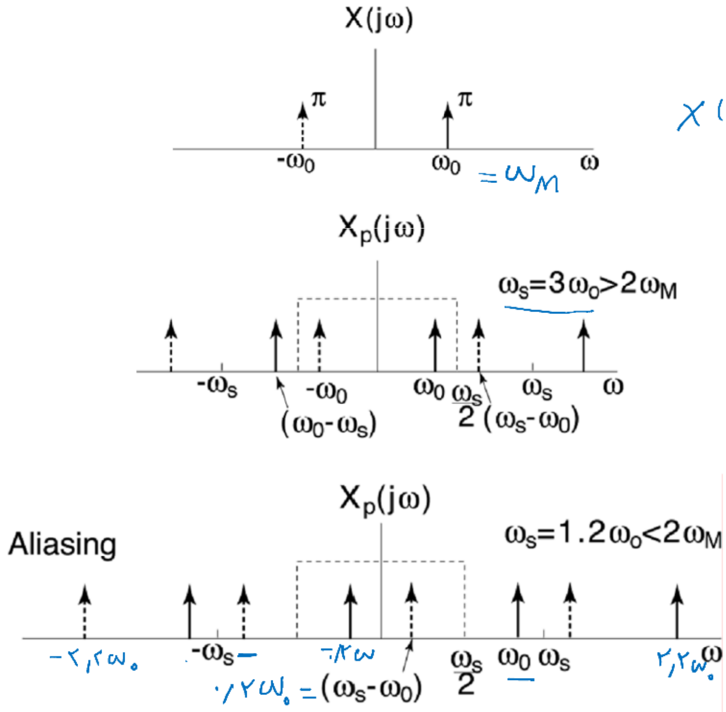
- درونیابی مرتبه صفر (ZOH)



- درونیابی مرتبه یک (FOH) یا درونیابی خطی



• مثال- $x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$

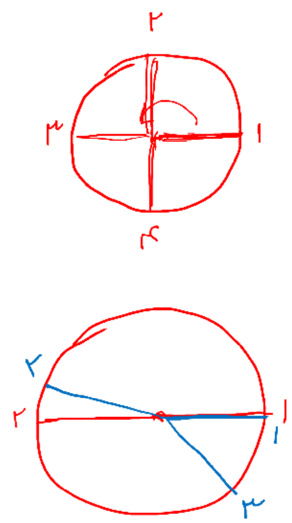


$X(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

$x_r(t) = x(t)$

$x_r(t) = \cos(0.2\omega_0 t + \varphi_0)$

T پریود روشن شدن لامپ



$4T$ = یک پریود چرخ

$2T$ = پریود

$2T <$ پریود

سیگنالها و سیستمها

فصل هشتم: تبدیل لاپلاس

Laplace Transform

جلسه اول

تعریف، مثال، ویژگیهای ناحیه همگرایی

چرا تبدیل لاپلاس؟

- تبدیل فوریه چه کم دارد؟
  - تحلیل عملکرد فیلتر، تحلیل نمونه برداری، محاسبه کانولوشن، محاسبه معکوس سیستم
  - محدودیت تبدیل فوریه: بشرط مطلقا انتگرال پذیر بودن سیگنال

- اگر یک سیستم ناپایدار باشد، تبدیل فوریه را نمیتوان استفاده کرد.

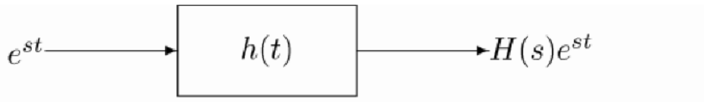
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt = \infty$$

- یا اگر پارامترهای یک سیستم پایدار تغییر کند، آیا سیستم پایدار میماند؟

- تبدیل لاپلاس، برای دسته بزرگتری از سیگنالها (در مقایسه با تبدیل فوریه) قابل استفاده است.
- وضعیت پایداری در حوزه لاپلاس بخوبی قابل تحلیل است.

تبدیل لاپلاس

- یادآوری: سیگنال e^{st} تابع ویژه هر سیستم LTI است:



$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \quad \text{(assuming this converges)}$$

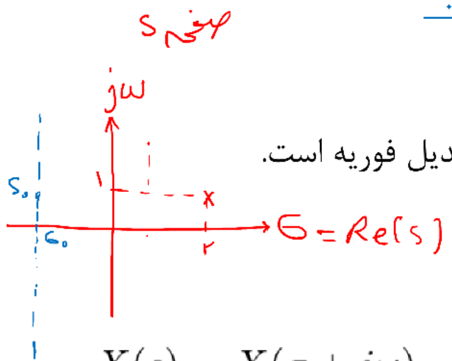
در حالت کلی، s میتواند یک مقدار مختلط باشد: $s = \sigma + j\omega$

- **تعریف** تبدیل لاپلاس برای سیگنال x(t):

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

- مجموعه مقادیر مختلط $s = \sigma + j\omega$ که به ازای آن، انتگرال فوق همگراست (یعنی تبدیل لاپلاس در آن نقاط وجود دارد)، ناحیه همگرایی (ROC=Region Of Convergence) تبدیل لاپلاس را تشکیل میدهد.

تبدیل لاپلاس و ارتباط با تبدیل فوریه



- اگر $s = j\omega \in ROC$ آنگاه: $\quad X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$

یعنی مقدار تبدیل لاپلاس روی محور موهومی در صفحه مختلط برابر مقدار تبدیل فوریه است.

- در حالت کلی برای $s = \sigma + j\omega$ داریم:

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

- بنابراین وجود تبدیل لاپلاس در نقطه $s = \sigma + j\omega$ منوط به شرط زیر است:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|\, dt < \infty\}$$

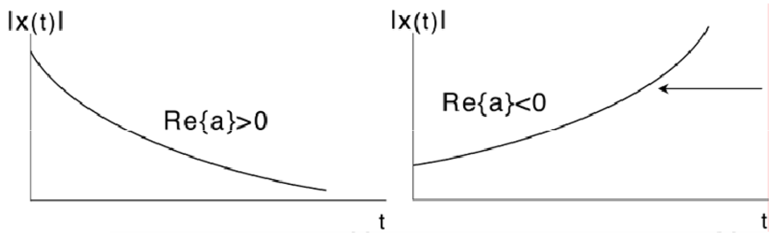
که تنها وابسته به $\sigma = Re[s]$ است.

تبدیل لاپلاس

- مثال۱- تبدیل لاپلاس سیگنال نمایی راسترو $x_1(t) = e^{-at}\,u(t)$

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} - \frac{e^{-(s+a)\infty}}{s+a}$$



فرض کنید: $s+a = R + jI \Rightarrow \left|e^{-(s+a)t}\right| = \left|e^{-(R+jI)t}\right| = e^{-Rt}\left|e^{-jIt}\right| = e^{-Rt}$

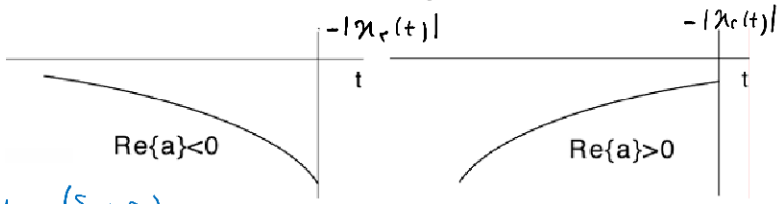
که اگر $R>0$ آنگاه: $e^{-(s+a)\infty} = 0$ پس تبدیل لاپلاس داریم:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a} \quad , \quad Re[s+a] > 0 \quad \text{یا} \quad \underbrace{Re(s) > -Re(a)}_{ROC}$$

تبدیل لاپلاس

- مثال۲- سیگنال نمایی چپرو $x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X_2(s) = -\int_{-\infty}^{0} e^{-at} e^{-st}\, dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}\, dt$$



$$= \frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+a} e^{(s+a)\infty}$$

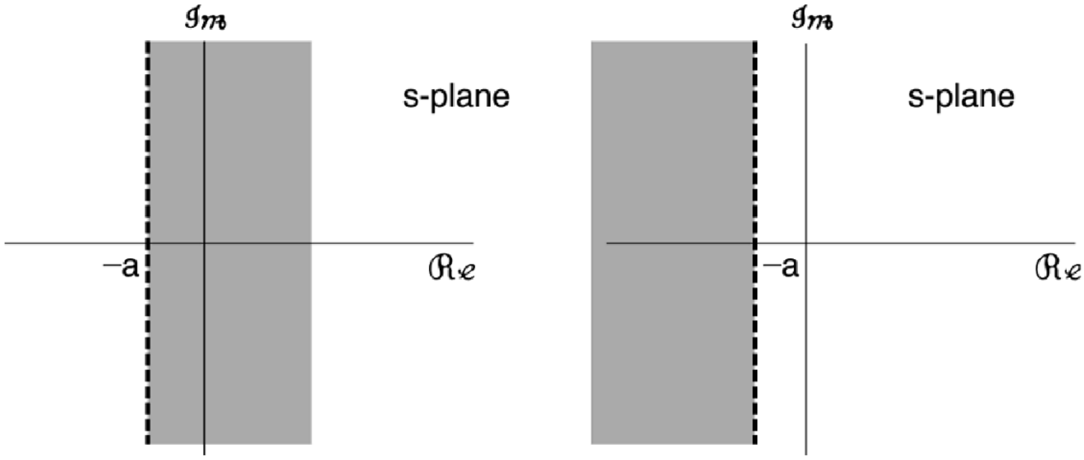
$$= \frac{1}{s+a} \quad , \quad \underbrace{Re[s] < -Re[a]}_{ROC}$$

تبدیل لاپلاس

- مقایسه دو مثال:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\} \qquad X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

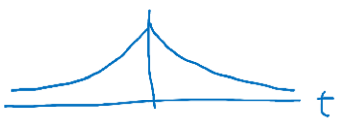
$x_1(t) = e^{-at}u(t)$ - right-sided signal $\qquad x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ - left-sided signal



تبدیل لاپلاس

- مثال ۳- تبدیل لاپلاس سیگنال نمایی دوطرفه $x_3(t) = e^{-a|t|}$

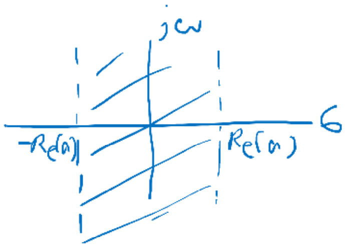
$|x_3(t)|, Re(a)>0$



$$x_3(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

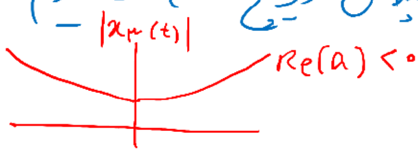
$$X_3(s) = \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{Re(s)>-Re(a)} - \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{Re(s)<Re(a)} = \frac{-2a}{s^2-a^2}, \quad -Re(a)<Re(s)<Re(a)$$

$Re(a)>0$



وقتی $Re(a)<0$ ، $ROC=\phi$

یعنی تبدیل لاپلاس در هیچ نقطه ای نداریم



تبدیل لاپلاس هم ممکن است وجود نداشته باشد!

- سیگنال دو طرفه بصورت $x(t) = Ce^{-t}$ تبدیل لاپلاس ندارد (ناحیه همگرایی تهی است) زیرا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)e^{-\sigma t}|}_{\substack{\| \\ Ce^{-(\sigma+1)t}}} dt = \infty \text{ for all } \sigma$$

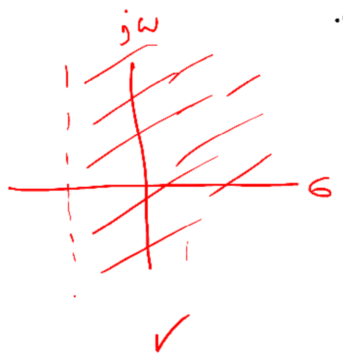
- سیگنال $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ تبدیل لاپلاس ندارد اما تبدیل فوریه دارد:

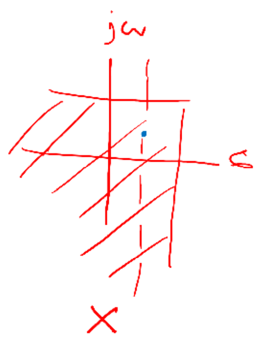
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t} dt = \infty \text{ for all } \sigma$$

$$FT\text{: } X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۱- ROC در صورت تهی نبودن، خطوطی موازی محور $j\omega$ را شامل میشود.



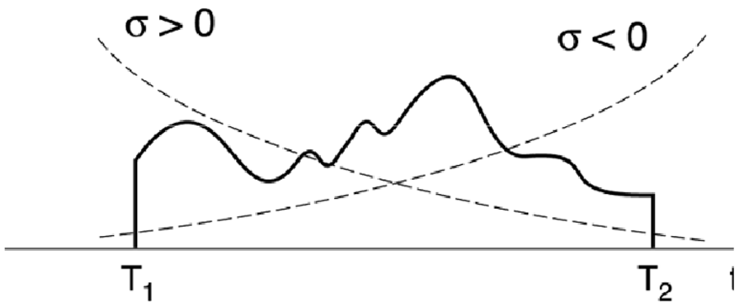


۲- اگر X(s) یک تابع گویا باشد، در این صورت ROC شامل هیچ قطبی نیست. زیرا قطب‌ها مقادیری از s است که D(s)=0

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty \quad \text{Not convergent.}$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۳- اگر x(t) دارای گستره زمانی محدودی باشد و مطلقا انتگرال پذیر باشد، آنگاه ROC شامل کل صفحه s است.



$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-st}dt}_{\text{A finite integration interval}}$$

$$< \infty \quad \text{if} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt < \infty$$

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-st}dt\right|$$

$$\leq \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|\, e^{-\sigma t}dt$$

$\sigma > 0$

$$\leq e^{-\sigma T_1}\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt$$

$$< \infty$$

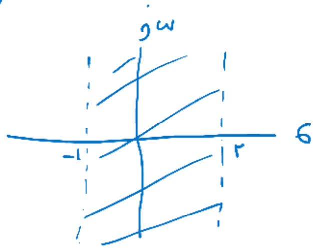
- مثال ۴- تبدیل لاپلاس سیگنال ضربه $x(t) = \delta(t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-st}\Big|_{t=0} = 1, \quad ROC = \mathbb{C}$$

- مثال۵- تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

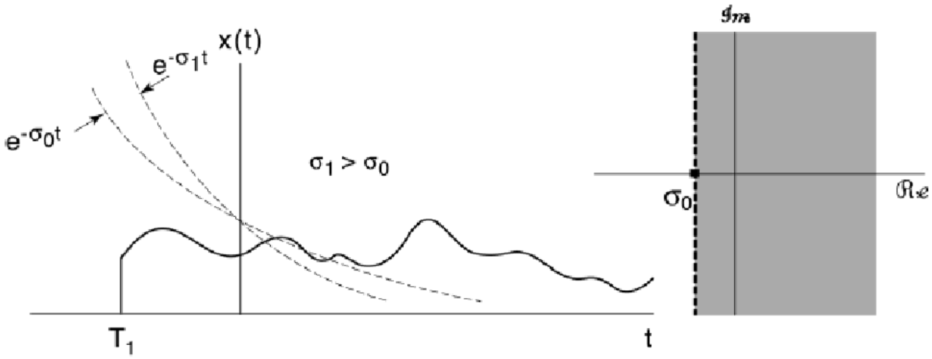
$$X(s) = 1 + \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re(s)>-1} - \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{Re(s)<2} = \frac{s^2-s-5}{(s+1)(s-2)} \qquad -1<Re(s)<2$$

$$= \frac{s^2-s-5}{s^2-s-2}, \quad -1<Re(s)<2$$



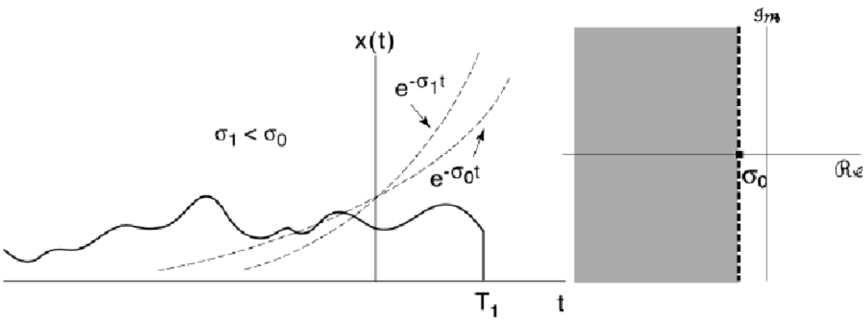
خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۴-اگر x(t) راسترو باشد (یعنی برای تمام زمان‌های قبل از یک زمان خاص مقدار صفر داشته باشد)، و اگر $Re(s)=\sigma_0$ در ROC باشد، آنگاه همه مقادیر s که در آن $Re(s)>\sigma_0$ است نیز در ROC قرار دارند (یعنی ROC نیم صفحه ای در سمت راست صفحه s (RHP) خواهد بود)



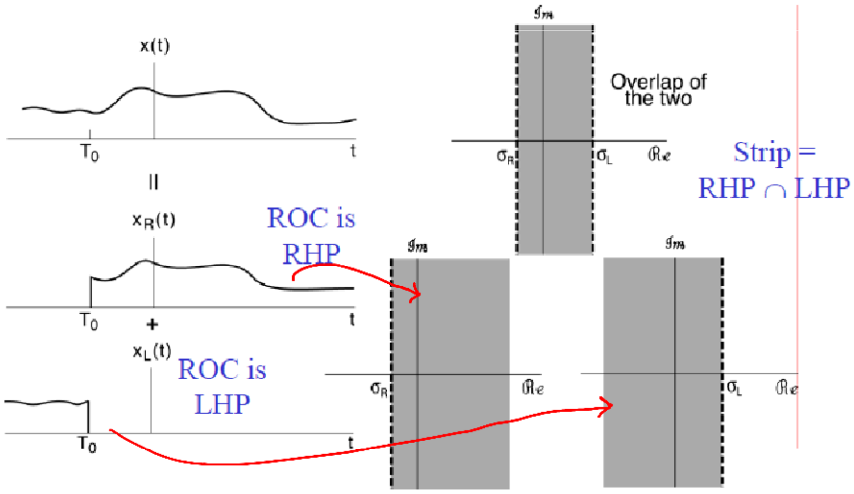
خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۵- اگر x(t) یک سیگنال چپرو باشد (یعنی برای تمام زمان‌های بعد از یک زمان خاص مقدار صفر داشته باشد)، و اگر $Re(s)=\sigma_0$ در ROC باشد، آنگاه همه مقادیر s که در آن $Re(s)<\sigma_0$ است نیز در ROC قرار دارند (یعنی ROC نیم صفحه ای در سمت چپ صفحه s (LHP) خواهد بود)



خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۶-اگر x(t) دو طرفه باشد و اگر خط $Re(s)=\sigma_0$ در ROC باشد، آنگاه ROC شامل نواری در صفحه s است که شامل خط $Re(s)=\sigma_0$ است



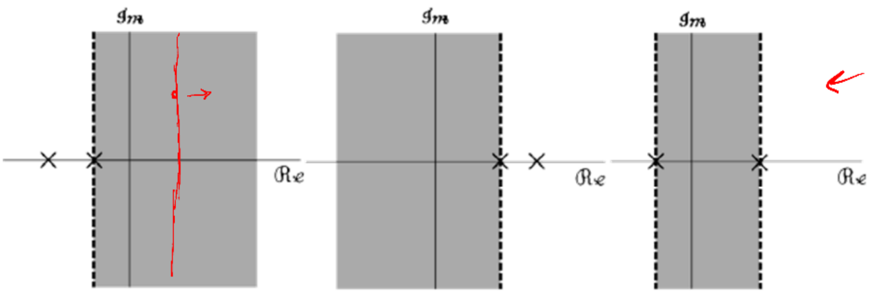
خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

۷- اگر X(s) گویا باشد، آنگاه ROC به قطب ها محدود میشود یا اینکه تا بینهایت گسترش می یابد. بعلاوه، ROC هیچ قطبی را شامل نمیشود.

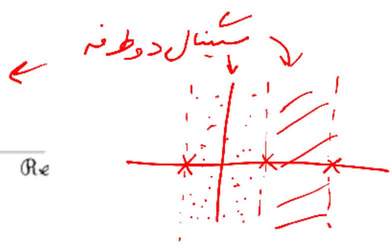
۸- فرض کنید که X(s) گویا است، آنگاه

الف) اگر x(t) یک طرفه راست باشد، ROC سمت راست راست‌ترین قطب است.

ب) اگر x(t) یک طرفه چپ باشد، ROC سمت چپ چپ‌ترین قطب است.



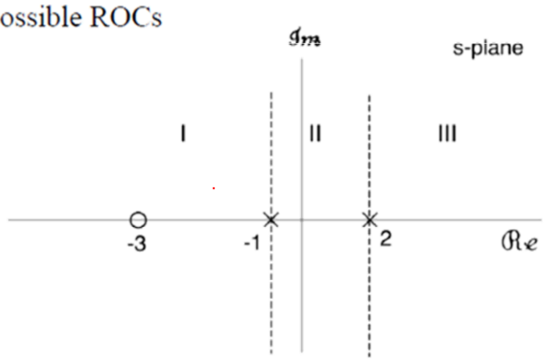
(a) (b) (c)



خواص ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس

- مثال۶- تاثیر ناحیه همگرایی بر بیان حوزه زمانی سیگنال؛ فرض کنید شکل جبری تبدیل لاپلاس سیگنال بصورت $X(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$ داده شده است. در اینصورت، سه ناحیه همگرایی متفاوت میتوان در نظر گرفت:

Three possible ROCs



I : $Re(s) < -1$: سیگنال چپ‌رو

II : $-1 < Re(s) < 2$: سیگنال دوطرفه

III : $Re(s) > 2$: سیگنال راست‌رو

سیگنالها و سیستمها

فصل هشتم: تبدیل لاپلاس

Laplace Transform

جلسه دوم

تبدیل لاپلاس معکوس، خواص تبدیل لاپلاس

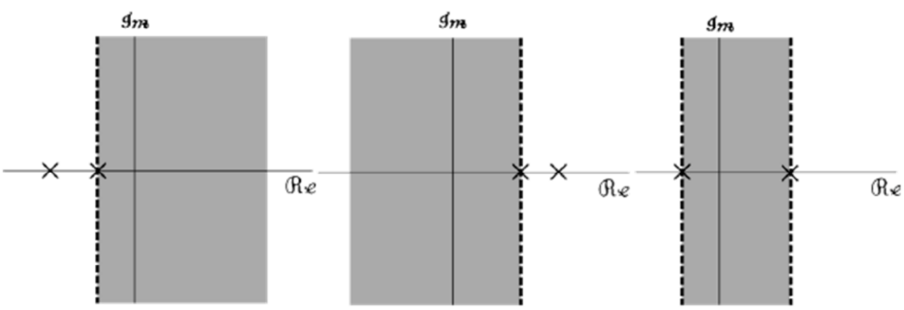
یاداوری: تبدیل لاپلاس

- **تعریف** تبدیل لاپلاس برای سیگنال x(t):

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

در حالت کلی، s یک مقدار مختلط است: $s = \sigma + j\omega$

ناحیه همگرایی (ROC): مجموعه مقادیر s که به ازای آنها، انتگرال مربوط ب تبدیل لاپلاس همگراست.



(a) (b) (c)

معکوس تبدیل لاپلاس

- میدانیم:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}, \quad s = \sigma + j\omega \in \text{ ROC}$$

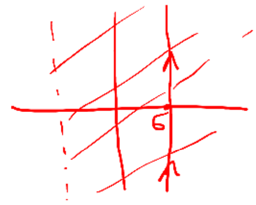
- با استفاده از معکوس تبدیل فوریه داریم:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

تبدیل معکوس لاپلاس:

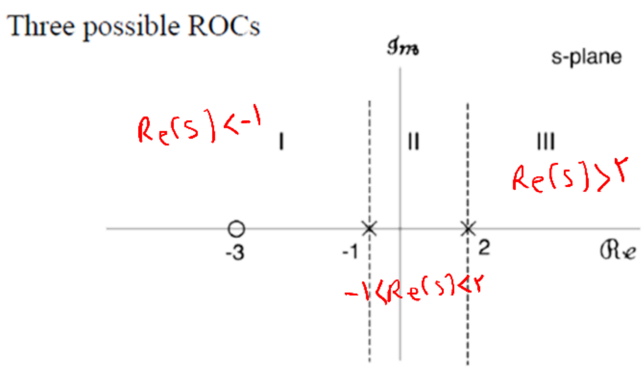


معکوس تبدیل لاپلاس

- وقتی X(s) یک تابع گویاست، با تجزیه به کسرهای جزیی میتوان تبدیل معکوس آن را تعیین کرد.
- مثال ۱- تابع گویای زیر، شکل جبری تبدیل لاپلاس یک سیگنال است. سیگنال را تعیین کنید.

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3}$$



I: چپرو

$$x(t) = -Ae^{-t}u(-t) - Be^{2t}u(-t) = \left[\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t}\right]u(-t)$$

II: دوطرفه

راست‌رو، چپرو

$$x(t) = Ae^{-t}u(t) - Be^{2t}u(-t) = -\left[\frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{5}{3}e^{2t}u(-t)\right]$$

III:

$$x(t) = Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t) = \left[-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t}\right]u(t)$$

خواص تبدیل لاپلاس

- فرضیات: $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) \quad , ROC = R_1 \qquad x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_2(s) \quad , ROC = R_2$

۱- خطی بودن:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX_1(s) + bX_2(s), \text{ with ROC containing } R_1 \cap R_2$$

$ROC \geq R_1 \cap R_2$

ناحیه همگرای میتواند از ناحیه مشترک R_1 و R_2 بزرگتر باشد:

E.g. $\quad x_1(t) = x_2(t)$ and $a = -b$

Then $\quad ax_1(t) + bx_2(t) = 0 \longrightarrow X(s) = 0$

$\Rightarrow$ ROC entire s-plane

مثال: $x_1(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow X_1(s) = \frac{1}{s+1}, Re(s) > -1$

$x_2(t) = -e^{-2t}u(-t) \longleftrightarrow X_2(s) = \frac{1}{s+2}, Re(s) < -2$

$\Rightarrow R_1 \cap R_2 = \phi$

درنتیجه تبدیل خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ دارای تبدیل لاپلاس نیست

خواص تبدیل لاپلاس

۲- انتقال در زمان:

$$x(t-T) \longleftrightarrow e^{-sT}X(s), \text{ same ROC as } X(s)$$

مثال-

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad ?$$

$$\frac{e^{-sT}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{-2t}u(t)|_{t \to t-T}$$

$$\downarrow T = -3$$

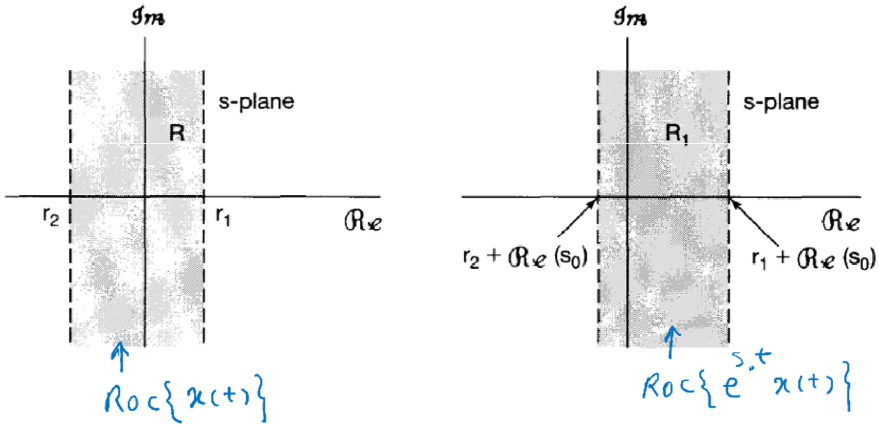
$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{-2(t+3)}u(t+3)$$

خواص تبدیل لاپلاس

۳- انتقال در فرکانس

(توجه: s را فرکانس مختلط گویند)

$$e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0), \quad \text{with ROC} = R + \mathcal{R}e\{s_0\}$$



خواص تبدیل لاپلاس

مثال- تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t) = e^{-at}cos\omega_0 t\ u(t)$ ؟

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{-at}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-at}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-(a-j\omega_0)t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-(a+j\omega_0)t}u(t)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+(a-j\omega_0)}}_{Re(s)>-a} + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+a+j\omega_0}}_{Re(s)>-a} = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}, \quad Re(s)>-a$$

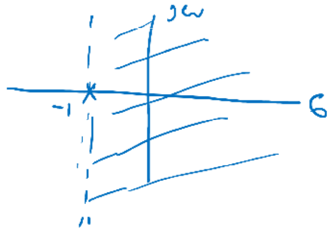
خواص تبدیل لاپلاس

۴- تغییر مقیاس
$$x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{with ROC } R_1 = aR.$$

از جمله:
$$x(-t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(-s), \quad \text{with ROC} = -R$$

- مثال- مقایسه تبدیل لاپلاس سیگنالهای $e^{-t}u(t)$ و $e^{-at}u(t)$ (a>0)

$\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$, $Re(s) > -1$

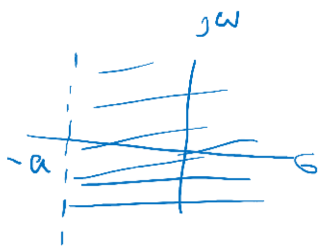


$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) > -a$

$\parallel$

$\mathcal{L}\{e^{-at}u(at)\} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{s}{a}+1} = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) > -a$

با کمک قاعده تغییر مقیاس



خواص تبدیل لاپلاس

۵- مزدوج سیگنال
$$x^*(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X^*(s^*), \quad \text{with ROC} = R$$

وقتی x(t) حقیقی است آنگاه: $X^*(s) = X(s^*)$

$x^*(t) = x(t) \Rightarrow X^*(s^*) = X(s) \Rightarrow$

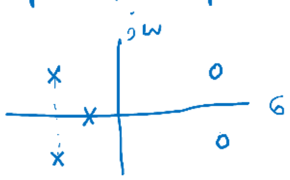
حال اگر $X(s)$ تابع گویا باشد، صفرها (و قطبها) بصورت جفت مزدوج هم ظاهر میشوند.

$X(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$, صفرها : $q(s) = 0$

فرض کنید s_1 یک صفر $X(s)$ باشد: $q(s_1) = 0$

از طرف دیگر $X^*(s) = X(s^*)$ پس: $X^*(s_1) = X(s_1^*) = 0$

$\Rightarrow q(s_1^*) = q^*(s_1) = 0 \Rightarrow q(s_1^*) = 0 \Rightarrow$ s_1^* هم صفر $X(s)$ است



خواص تبدیل لاپلاس

۶- کانولوشن $x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s)X_2(s)$, with ROC containing $R_1 \cap R_2$

$ROC \geq R_1 \cap R_2$

حذف صفر و قطب میتواند سبب بزرگتر شدن ROC از ناحیه مشترک R_1 و R_2 شود.

اثبات :

$$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\, e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-st}dt}_{\mathcal{L}\{x_2(t-\tau)\}}\, d\tau$$

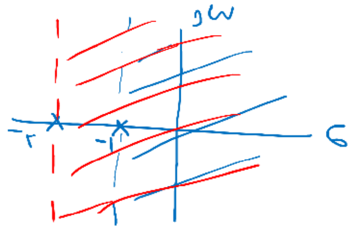
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot X_2(s)e^{-s\tau}d\tau$$

$$= X_1(s)\,X_2(s)$$

مثال – $x_1(t) = e^{-t}u(t)$ و $x_2(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$

$\mathcal{L}\{x_1(t) * x_2(t)\} = ?$

$$\left.\begin{aligned} X_1(s) &= \frac{1}{s+1}, \quad Re\{s\} > -1 \\ X_2(s) &= 1 - \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2 \\ &= \frac{s+1}{s+2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 \cap R_2 = \{s \mid Re\{s\} > -1\}$$



$$X_1(s)\,X_2(s) = \frac{1}{\cancel{s+1}} \cdot \frac{\cancel{s+1}}{s+2} = \frac{1}{s+2}, \quad Re\{s\} > -2$$

خواص تبدیل لاپلاس

۷- مشتق در زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} sX(s), \qquad \text{with ROC containing } R.$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} s X(s)\, e^{st}\, dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s)$$

۸- مشتق در حوزه S

$$-tx(t) \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \qquad \text{with ROC} = R.$$

$$X(s) = \int x(t)\, e^{-st}\, dt \longrightarrow \frac{dX}{ds} = \int (-t x(t))\, e^{-st}\, dt \Rightarrow \cdots$$

مثال: $\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n$

خواص تبدیل لاپلاس

۹- انتگرال در زمان

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \stackrel{\mathfrak{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} X(s), \quad \text{with ROC containing } R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}.$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = x(t) * u(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau\right\} = X(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$ROC \supseteq R \cap \{Re(s) > 0\}$$

مثال: $\mathcal{L}\{t u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^2}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} t^2 u(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} \tau u(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{1}{s^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{u_{-n}(t)\} = \frac{1}{s^n}$$

انتگرال مرتبه n ام $\delta(t)$ ←

خواص تبدیل لاپلاس

۱۰- قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی: اگر x(t) سیگنال علی باشد (یعنی $x(t) = 0 ,t < 0$) آنگاه داریم:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$ قضیه مقدار اولیه:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$ قضیه مقدار نهایی:

(مشروط به وجود حدهای مورد بررسی)

شرایط خاص قضیه مقدار اولیه: x(t) در t=0 دارای ضربه یا مشتقات آن نباشد. یا معادل آن، وقتی X(s) یک تابع گویاست، درجه صورت آن از درجه مخرج کمتر باشد. در اینحالت، تابع X(s) را اکیدا مناسب (strictly proper) میگویند.

شرایط خاص قضیه مقدار نهایی: در حالتیکه X(s) گویاست، sX(s) هیچ قطبی روی محور $j\omega$ یا سمت راست آن نداشته باشد. (X(s) حداکثر یک قطب در مبدا داشته باشد و بقیه قطبها سمت چپ محور jω باشند)

خواص تبدیل لاپلاس

- اثبات قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی

اثبات قضیه مقدار اولیه:

$$x(t) = x(t)u(t)$$
$$= \left(x(0^+) + x'(0^+)t + \frac{1}{2}x''(0^+)t^2 + \cdots\right)u(t)$$
$$\Rightarrow X(s) = \left(\frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \cdots\right)$$
$$sX(s) = x(0^+) + \frac{x'(0^+)}{s} + \frac{x''(0^+)}{s^2} + \cdots$$
$$\lim_{s \to \infty} sX(s) = x(0^+)$$

خواص تبدیل لاپلاس

اثبات قضیه مقدار نهایی :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = sX(s)$$

$$\Rightarrow \quad sX(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{s \to 0} sX(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) \left[\lim_{s \to 0} e^{-st}\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)\, dt$$

$$= x(t)\Big|_{t=+\infty}$$

سیگنالها و سیستمها

فصل هشتم: تبدیل لاپلاس

Laplace Transform

جلسه سوم

تحلیل سیستمهای LTI در حوزه لاپلاس، تابع تبدیل، سیستمهای LCCDE در حوزه لاپلاس

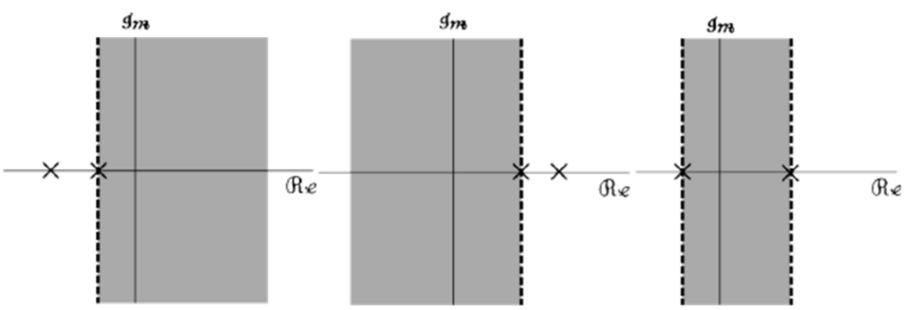
یاداوری: تبدیل لاپلاس

- **تعریف** تبدیل لاپلاس برای سیگنال x(t):

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

در حالت کلی، s یک مقدار مختلط است: $s = \sigma + j\omega$

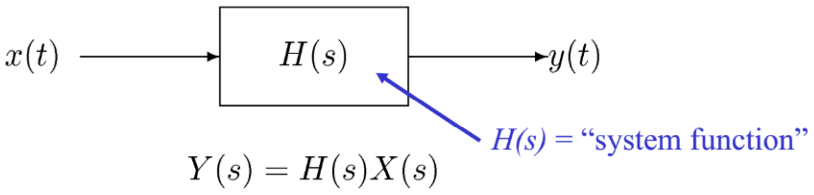
ناحیه همگرایی (ROC): مجموعه مقادیر s که به ازای آنها، انتگرال مربوط ب تبدیل لاپلاس همگراست.



(a) (b) (c)

خواص تابع تبدیل سیستم

- تابع تبدیل سیستم یک سیستم را بطور کامل توصیف میکند.



۱- علّی بودن: $(h(t) = 0, t < 0)$

- ROC تابع تبدیل یک سیستم علی، یک نیم صفحه دست راستی (RHP) است (شرط لازم برای علی بودن).

مثال: سیستم با تابع تبدیل $H(s) = \frac{1}{s+1}, Re[s] > -1$ علی است: $h(t) = e^{-t}u(t)$

و سیستم با تابع تبدیل $H(s) = \frac{e^s}{s+1}, Re[s] > -1$ علی نیست: $h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1)$

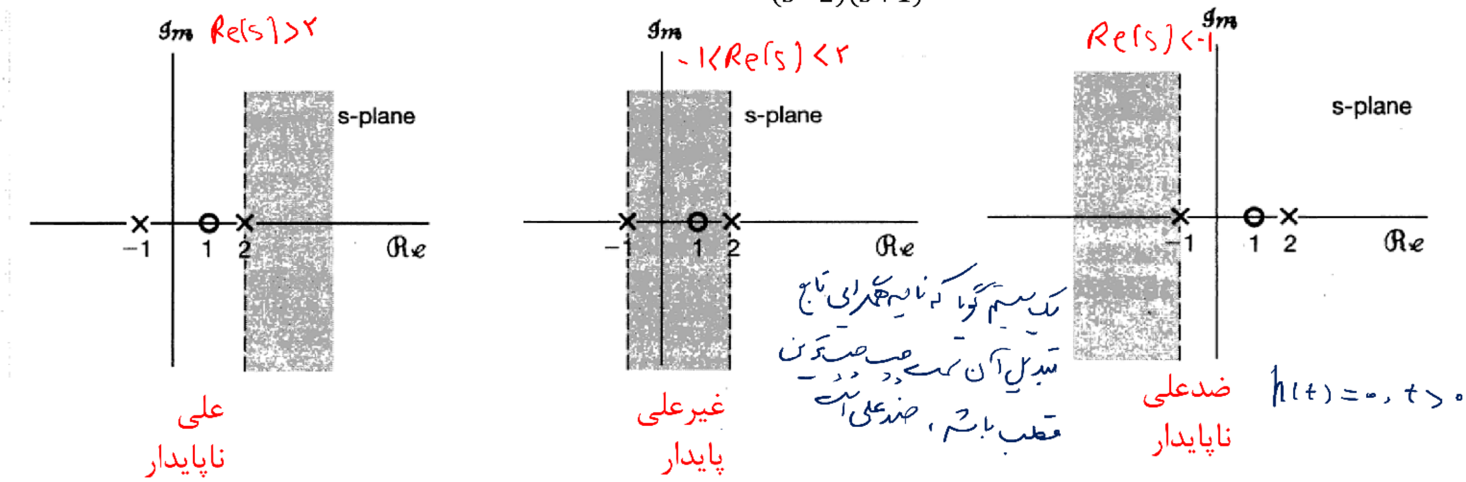
- برای یک سیستم با تابع تبدیل گویا، علی بودن معادل آن است که ROC سمت راست ترین قطب باشد.

خواص تابع تبدیل سیستم

۲- پایداری $(\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt < \infty)$:

- یک سیستم LTI پایدار است اگر و فقط اگر ROC محور $j\omega$ را دربربگیرد.

مثال: سیستم با تابع تبدیل به شکل جبری $H(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$ در مورد علی و پایداری سیستم بحث کنید.

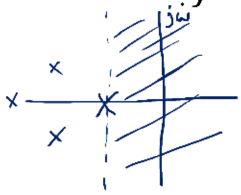


یک سیستم گویا که ناحیه همگرایی تابع تبدیل آن سمت چپ چپ‌ترین قطب باشد، ضدعلی است

$h(t) = 0, t > 0$

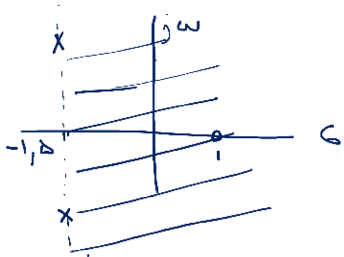
خواص تابع تبدیل سیستم

- سیستم علی با تابع تبدیل گویا، پایدار است اگر و فقط اگر همه قطبهای سیستم سمت چپ محور $j\omega$ باشد.



مثال: سیستم LTI علی با تابع تبدیل $H(s) = \frac{s-1}{s^2+3s+10}$ ایا پایدار است؟

$$s^2 + 3s + 10 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-3 \pm j\sqrt{31}}{2}$$



هردو قطب سیستم سمت چپ محور jω واست پس سیستم پایدار است.

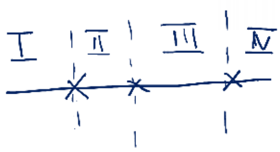
سیستم LTI توصیف شده LCCDE

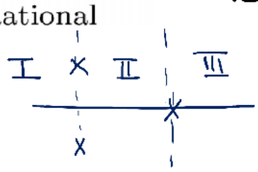
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}_{\text{Rational}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s-s_k}$$

(با فرض اینکه قطبها غیرتکراری و نیز $M<N$

- تابع تبدیل سیستم LCCDE یک تابع گویا برحسب s است.





  - صفرها: ریشه های صورت تابع فوق (M تا صفر)
  - قطبها: ریشه های مخرج تابع فوق (N تا قطب)
  - در یک سیستم حقیقی، ضرایب چندجمله ایهای فوق، حقیقی است. بنابراین صفرها (وقطبها) بصورت جفت مزدوج ظاهر میشوند.

$h(0^+) = \lim_{s \to \infty} sH(s)$

با فرض علی بودن

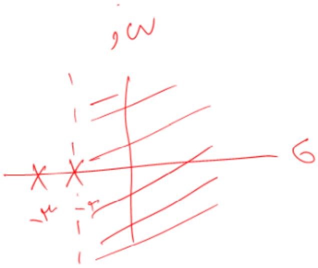
$H(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow h(0^+) = 1$

$H(s) = \frac{s^2}{s+1} \rightarrow (h(0^+) \rightarrow \infty)$

  - پاسخ ضربه، بصورت مجموع چند سیگنال نمایی است.
  - اگر M=N، پاسخ ضربه شامل سیگنال ضربه خواهد بود و اگر M>N، پاسخ شامل مشتقات ضربه خواهد بود.

$H(s) = \frac{s^2+2}{s+1}$, $M=2$, $N=1$: $H(s) = s-1+\frac{3}{s+1}$ $Re\{s\} > -1$ $\Rightarrow h(t) = \delta'(t) - \delta(t) + 3e^{-t}u(t)$

سیستم LTI توصیف شده LCCDE



- مثال: سیستم LTI با معادله مشتقی زیر توصیف شده است: (با فرض علی بودن)

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x'(t)+x(t)$$

تابع تبدیل سیستم، پاسخ ضربه سیستم، پاسخ سیستم به ورودی $x(t)=e^{-2t}u(t)$؟

مقدار k چقدر باشد تا به ازای ورودی $e^{-kt}u(t)$ اثری از ورودی در خروجی نباشد؟

$$(s^2+5s+6)Y(s)=(s+1)X(s) \Rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s+1}{s^2+5s+6},\quad Re(s)>-2$$

با فرض علی بودن

$$H(s)=\frac{A=-1}{s+2}+\frac{B=2}{s+3} \xRightarrow[Re(s)>-2]{} h(t)=(-e^{-2t}+2e^{-3t})u(t)$$

$$x(t)=e^{-2t}u(t) \Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+2},\ Re(s)>-2 \Rightarrow Y(s)=H(s)X(s)=\frac{s+1}{(s+2)^2(s+3)}\quad Re(s)>-2$$

$$=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{s+3},\quad B=-1,\ C=-2,\ A=\frac{2}{(s+3)^2}\Big|_{s=-2}=2$$

$$y(t)=(2e^{-2t}-te^{-2t}-2e^{-3t})u(t)$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^2},\quad Re(s)>-a$$

$$H(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)},\quad Re(s)>-2$$

$$x(t)=e^{-kt}u(t) \Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+k},\quad Re(s)>-k$$

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+k)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+k}(\times)$$

برای آنکه اثر ورودی $e^{-kt}u(t)$ در خروجی ظاهر نشود کافی است حذف صفر و قطب رخ

دهد یعنی: $K=1$

روش دیگر: $\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-k}=0 \Rightarrow -k+1=0 \Rightarrow k=1$

- مثال: فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI داده شده است:

الف- سیستم علی است.

ب- سیستم دارای تابع تبدیل گویا و تنها دو قطب در s=-2 و s=4 است.

ج- اگر x(t)=1، y(t)=0.

د- پاسخ ضربه سیستم در $t = 0^+$ برابر ۴ است.

$$H(s)=\frac{q(s)}{(s+2)(s-4)},\ Re(s)>4$$

$$h(0^+)=\lim_{s\to\infty} sH(s)=4$$

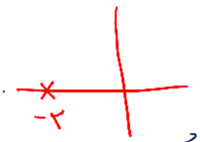
$$q(s)=A(s-s_0)$$

$$\lim_{s\to\infty} sH(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{As(s-s_0)}{(s+2)(s-4)}=A=4$$

$$y(t)\Big|_{x(t)=1=e^{0t}}=H(s)e^{st}\Big|_{s=0}=H(0)=0 \Rightarrow q(0)=0 \Rightarrow s_0=0$$

$$\Rightarrow q(s)=4s \Rightarrow H(s)=\frac{4s}{(s+2)(s-4)},\ Re(s)>4$$

- مثال: یک سیستم LTI علی و پایدار با پاسخ ضربه $h(t)$ و تابع تبدیل گویای $H(s)$ در نظر بگیرید. فرض کنید $H(s)$ قطبی در s=-2 دارد و هیچ صفری در مبدا ندارد. موقعیت بقیه صفرها و قطبهای سیستم نامعلوم است. برای هر یک از حکم های زیر، بیان کنید آیا میتوان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد یا نه.



الف- $\mathcal{F}\{h(t)e^{3t}\}$ همگرا است.

$H(s)=\mathcal{F}\{h(t)e^{-6t}\} \Rightarrow$ آیا $H(s)$ در $Re(s)=-3$ وجود دارد؟ بله زیرا ROC قطعا $Re(s)=-3$ را شامل می‌شود

ب- $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt = 0$ $= H(0)$: نادرست زیرا در $s=0$ صفری نداریم

ج- $th(t)$ پاسخ ضربه سیستم علی و پایدار است. $th(t)$ پاسخ ضربه سیستم علی است و

$$\mathcal{L}\{th(t)\}=-\frac{dH}{ds}$$

از آنجا که $\frac{dH}{ds}$ هم قطبهایش سمت چپ محور $j\omega$ است پس سیستم پایدار است

د- $h(t)$ درای طول زمانی محدود است.

در اینصورت باید ناحیه همگرایی همه صفحه s باشد اما اینگونه نیست زیرا s=-2 قطب است و نمی‌تواند در ROC باشد

ه- $\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$

نمی‌توان اظهار نظر کرد

سیگنالها و سیستمها

فصل هشتم: تبدیل لاپلاس

Laplace Transform

جلسه چهارم

نمایش بلوک دیاگرامی سیستمهای LTI، تبدیل لاپلاس یکطرفه

مثال از سیستم LCCDE

- مثال- با فرض آنکه اندازه پاسخ فرکانسی یک سیستم LCCDE حقیقی، پایدار و علی بصورت $|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^4}$ باشد، تابع تبدیل سیستم با کمترین درجه ممکن را تعیین کنید.

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)\cdot H^*(j\omega) = H(j\omega)H(-j\omega) = H(s)H(-s)\Big|_{s=j\omega}$$

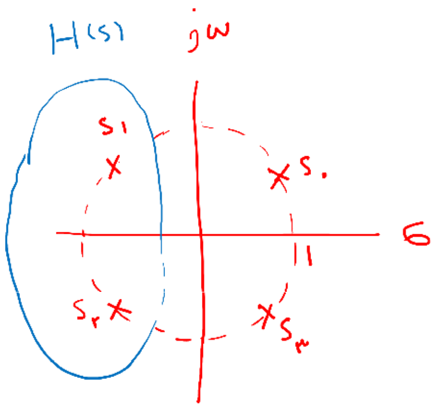
$$\Rightarrow H(s)H(-s) = \frac{1}{1+\omega^4}\Big|_{\omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1+s^4}$$

در سیستم LCCDE، تابع تبدیل گویاست.

اگر z_0 یک صفر $H(s)$ باشد آنگاه $-z_0$ صفر $H(-s)$ است و برای قطب هم اگر p_0 قطب $H(s)$ باشد، $-p_0$ قطب $H(-s)$ است.

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

$$1+s^4 = 0 \Rightarrow s^4 = -1 = e^{j(2k+1)\pi} \Rightarrow s = e^{j(2k+1)\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \begin{cases} s_0 = e^{j\pi/4} \\ s_1 = e^{j3\pi/4} \\ s_2 = e^{-j3\pi/4} \\ s_3 = e^{-j\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$



H(s) تابع تبدیل سیستم حقیقی است پس صفرها (و قطب‌ها) مزدوج هم ظاهر شود. از آنجایی سیستم علی پایدار است پس همه قطبها سمت چپ محور jω هستند:

$$H(s) = \frac{k}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1+s^4} \Rightarrow H^2(0) = 1 \Rightarrow H(0) = \pm 1 \Bigg\} \Rightarrow \frac{k}{s_1 s_2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow k = \pm 1$$

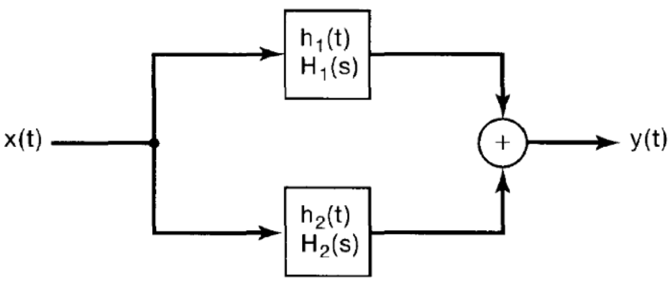
$$\Rightarrow H(s) = \frac{\pm 1}{s^2 - \sqrt{2}\, s + 1}$$

$$S_2 = -1\, S_0 = e^{j\pi} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = e^{j\frac{5\pi}{4}} = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$$

$$G(s) = \frac{s-1}{s+1} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1} \Rightarrow |G(j\omega)| = 1 \xRightarrow{\text{جواب دیگر}} H_2(s) = H(s)G(s)$$

توصیف بلوک دیاگرامی سیستمهای LTI

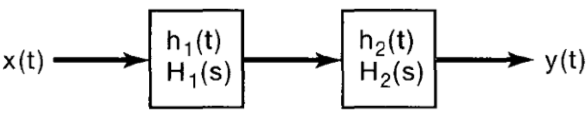
- انواع اتصالات دو سیستم
  - الف- اتصال موازی



$$h(t) = h_1(t) + h_2(t),$$

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

  - ب- اتصال سری

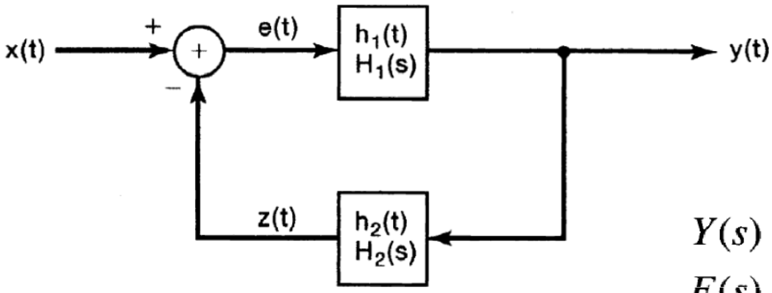


$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

توصیف بلوک دیاگرامی سیستمهای LTI

- ج- اتصال بازخوردی (feedback)



$$Y(s) = H_1(s)E(s),$$
$$E(s) = X(s) - Z(s),$$

$$Z(s) = H_2(s)Y(s),$$

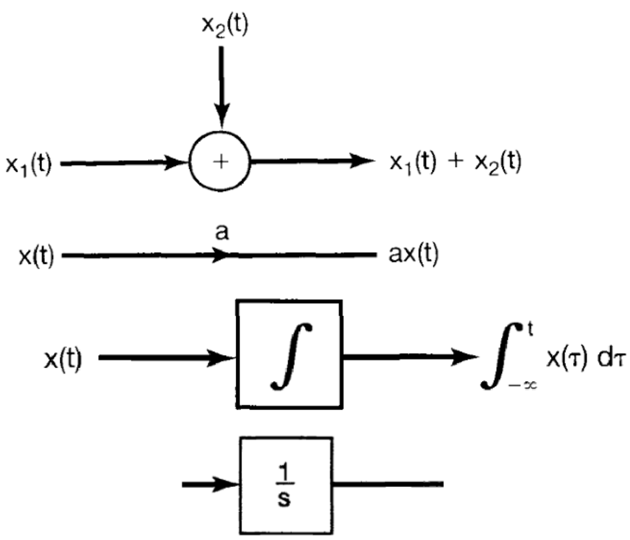
$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)], = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s)(1 + H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)X(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}}$$

توصیف بلوک دیاگرامی سیستمهای LCCDE علی

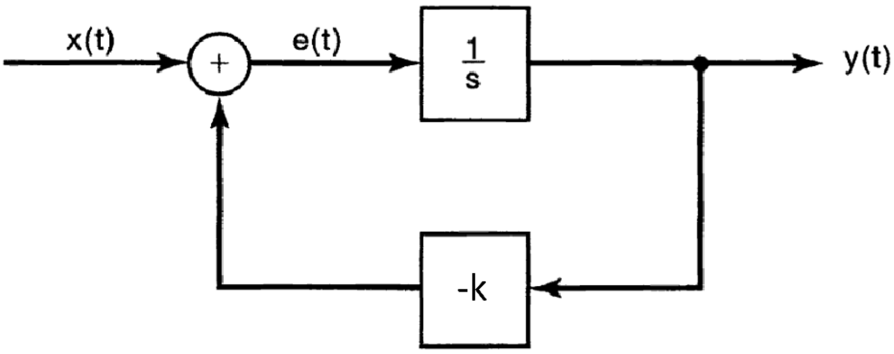
- سیستمهای LCCDE دارای تابع تبدیل گویا هستند.
- چرا توصیف بلوکی؟
  - نمایش خصوصیات و عملکرد سیستم بصورت بصری
  - امکان استفاده در پیاده سازی یا شبیه سازی سیستم



- اجزای اصلی نمایش بلوک دیاگرامی:
  - جمع کننده
  - بهره ثابت (ضرب یک سیگنال در مقدار ثابت)
  - انتگرالگیر

• مثال- سیستم با تابع تبدیل $H(s) = \frac{1}{s+k}$ (یا سیستم با معادله مشتقی: $\frac{dy}{dt} + k\,y(t) = x(t)$):

$$H(s) = \frac{1}{s+k} = \frac{Y(s)}{X(s)} \Longrightarrow sY(s) + kY(s) = X(s) \Longrightarrow \mathrm{Y(s)} = \frac{1}{\mathrm{s}}\left(\mathrm{X(s)} - \mathrm{kY(s)}\right)$$



$$\Rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{k}{s}} = \frac{1}{s+k}$$

روش های تحقق بلوکی سیستم

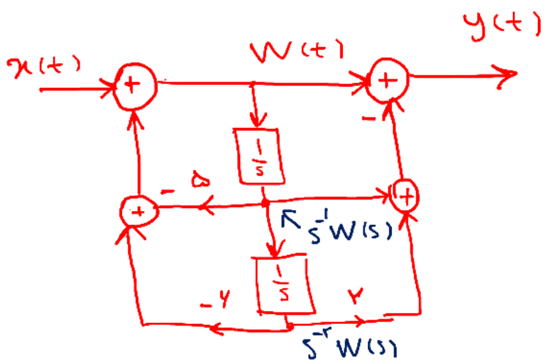
۱- روش مستقیم

مثال- $H(s) = \frac{s^2-s-2}{s^2+5s+6}$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2-s-2}{s^2+5s+6} = \frac{1-s^{-1}-2s^{-2}}{1+5s^{-1}+6s^{-2}} \cdot \frac{W(s)}{W(s)}$$

$$Y(s) = (1-s^{-1}-2s^{-2})W(s) = W(s) - s^{-1}W(s) - 2s^{-2}W(s)$$

$$X(s) = (1+5s^{-1}+6s^{-2})W(s) \Rightarrow W(s) = X(s) - 5s^{-1}W(s) - 6s^{-2}W(s)$$



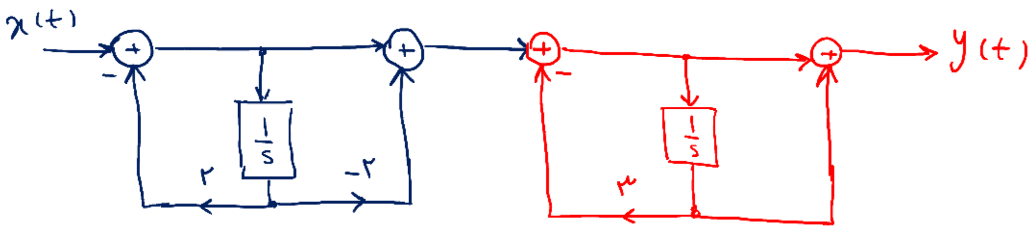
روش های تحقق بلوکی سیستم

۲- روش متوالی

مثال- $H(s) = \frac{s^2-s-2}{s^2+5s+6}$

$$H(s) = \frac{(s-2)(s+1)}{(s+2)(s+3)} = \underbrace{\frac{s-2}{s+2}}_{H_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{s+1}{s+3}}_{H_2(s)}$$

$$H_1(s) = \frac{1-2s^{-1}}{1+2s^{-1}} \quad , \quad H_2(s) = \frac{1+s^{-1}}{1+3s^{-1}}$$



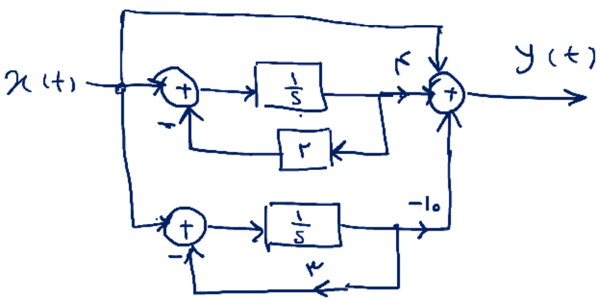
روش های تحقق بلوکی سیستم

۳- روش موازی

مثال- $H(s) = \frac{s^2-s-2}{s^2+5s+6}$

$$H(s) = \frac{s^2-s-2}{s^2+5s+6} = 1 + \frac{-6s-8}{s^2+5s+6}$$

$$= 1 - \frac{6s+8}{(s+2)(s+3)} = 1 + \frac{4}{s+2} - \frac{10}{s+3}$$



تبدیل لاپلاس یکطرفه (Unilateral Laplace Transform)

- در سیستم های علی LCCDE با شرایط اولیه، استفاده از تبدیل لاپلاس یکطرفه مفیدتر است:

$$X_{\mathcal{U}}(s) = \mathcal{UL}\{x(t)\} \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

۱- اگر x(t)=0 برای t<0 باشد، آنگاه $X_{\mathcal{U}}(s) = X(s)$

۲- مثلا، اگر h(t)پاسخ ضربه سیستم LTI علّی باشد، آنگاه $H_{\mathcal{U}}(s) = H(s)$

۳- تبدیل لاپلاس یک طرفه‌ی x(t) = تبدیل لاپلاس دوطرفه‌ی x(t)u(t-)

نتیجه: ROC برای تبدیل لاپلاس یکطرفه، همواره RHP (نیم‌صفحه سمت راست) است.

۴- خاصیت کانولوشن: اگر $x_1(t)=x_2(t)=0$ برای t<0، آنگاه:

$$\mathcal{UL}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_{1\mathcal{U}}(s).X_{2\mathcal{U}}(s)$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه

۵- خاصیت انتقال در زمان:

$$\mathcal{UL}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0}X_{\mathcal{U}}(s)\,, \qquad \text{iff } x(t) = 0 \; for\; t < 0 \; and \; t_0 > 0$$

مثال- فرض کنید $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{e^s}{s+a}, \qquad Re[s] > -a$$

$$\mathcal{UL}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-a(t+1)}u(t+1)dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \qquad Re[s] > -a$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه

مثال- تبدیل لاپلاس یکطرفه سیگنال $x(t) = \delta(t) - \underbrace{\delta(t+1)}_{0} + e^{-t}u(t)$

$$X_u(s) = 1 + \frac{1}{s+1} \quad , Re\{s\} > -1$$

۶- مشتق زمانی:

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = sX_u(s) - x(0_-)$$

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right\} = s^2X_u(s) - sx(0_-) - x'(0_-)$$

تبدیل لاپلاس یکطرفه

- مثال: معادله مشتقی زیر با شرایط اولیه را حل کنید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = \beta\,,\ y'(0^-) = \gamma\,,\ x(t) = \alpha u(t)$$

$$s^2Y_u(s) - \beta s - \gamma + 3sY_u(s) - 3\beta + 2Y_u(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y_u(s) = \frac{\alpha}{s} + 3\beta + \gamma + \beta s$$

$$Y_u(s) = \frac{\beta s^2 + (3\beta + \gamma)s + \alpha}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1} + \frac{k_3}{s+2}$$

$$k_1 = \frac{\alpha}{2}$$

$$k_2 = \frac{-2\beta - \gamma + \alpha}{-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = (k_1 + k_2e^{-t} + k_3e^{-3t})u(t)$$

$$k_3 = \frac{-2\beta - 2\gamma + \alpha}{(-2)(-1)}$$

سیگنالها و سیستمها

فصل نهم: تبدیل Z

Z Transform

جلسه اول

مقدمه، تعریف، مثال، خواص ناحیه همگرایی، تبدیل معکوس Z

مقدمه

- یاداوری از تابع ویژه سیستم

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = \underbrace{z^n}_{\substack{\text{Eigenfunction} \\ \text{for DT LTI}}} \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad \text{assuming it converges}$$

- همان دلایلی که اهمیت و ضرورت تبدیل لاپلاس را برای سیگنالهای پیوسته نشان میدهند، ضرورت تبدیل Z برای سیگنالهای گسسته را هم توضیح میدهند. (سیستمهای ناپایدار، شرایط پایداری، طراحی سیستم و ...)

تعریف

- تبدیل Z سیگنال گسسته x[n] بصورت زیر تعریف میشود:

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

- مقادیری از z مختلط که به ازای آنها، سری مربوط به تبدیل Z همگراست، ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل Z را تشکیل میدهد.
- ممکن است سیگنال تبدیل فوریه نداشته باشد، اما تبدیل Z داشته باشد.
- چنانچه برای یک سیگنال، ROC تهی باشد، آنگاه میگوییم تبدیل Z سیگنال وجود ندارد.

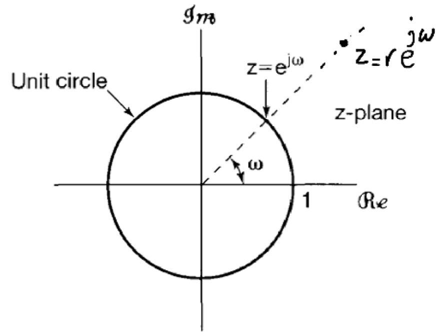
تبدیل Z و تبدیل فوریه

- با بیان عدد مختلط z در نمایش قطبی $z = r\, e^{j\omega}$ داریم:

$$z = re^{j\omega} \qquad , r = |z|$$

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right) e^{-j\omega n}$$

$$= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$$



(۱) : $$\text{ROC} = \left\{ z = re^{j\omega} \text{ at which } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

(۲) : $$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]\}.$$

تبدیل z در روی دایروه واحد برابر تبدیل فوریه است.

محاسبه تبدیل Z

- مثال۱- تبدیل Z سیگنال نمایی راسترو $x[n] = a^n u[n]$

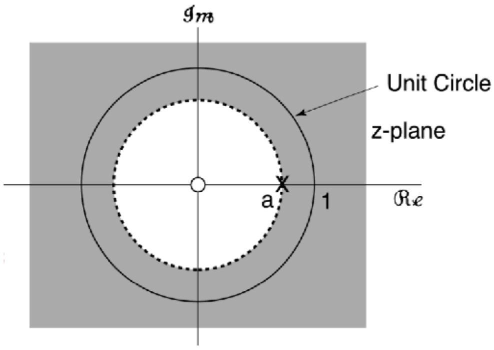
$$X(z) = \sum_n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

برای تعیین صفر و قطب

$$, \qquad |az^{-1}| < 1 \quad \equiv |z| > |a| : ROC$$

می دانیم :

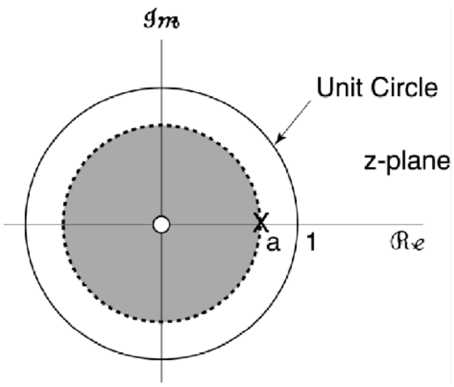
$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n = \frac{1}{1-S} \quad , \quad |S| < 1$$



محاسبه تبدیل Z

- مثال۲- سیگنال نمایی چپرو $x[n] = -a^n u[-n-1]$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1] z^{-n}\} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z - 1} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ &= \frac{z}{z-a}, \end{aligned}$$



Same $X(z)$ as in **Ex #1**, but different ROC.

If $|a^{-1}z| < 1$, i.e., $|z| < |a|$

محاسبه تبدیل Z

- مثال۳- سیگنال $x[n] = (\frac{1}{3})^n \sin(\frac{\pi}{4}n)u[n]$

$$x[n] = (\tfrac{1}{3})^n \sin(\tfrac{\pi}{4}n)u[n]$$

$$= \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{j\pi/4})^n u[n] - \tfrac{1}{2j}(\tfrac{1}{3}e^{-j\pi/4})^n u[n].$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]\right\} z^{-n}$$

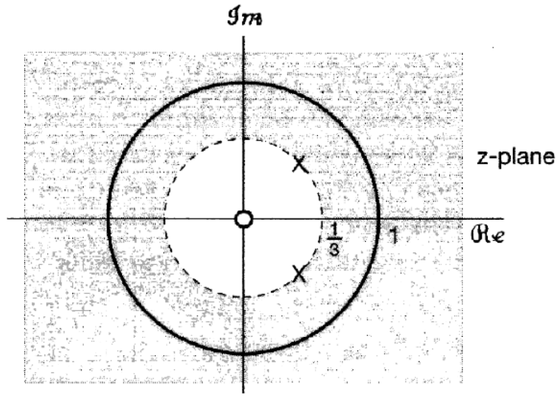
$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\pi/4}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1}},$$

$|z| > |\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}| = \frac{1}{3}$ $\quad$ $|z| > |\frac{1}{3}e^{-j\pi/4}| = \frac{1}{3}$

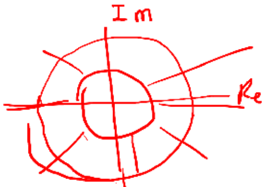
$$X(z) = \frac{\frac{1}{3\sqrt{2}}z}{(z-\frac{1}{3}e^{j\pi/4})(z-\frac{1}{3}e^{-j\pi/4})}$$

و $|z| > \frac{1}{3}$



خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

۱- ROC در صورت وجود، دایره هایی حول مبدا را شامل میشود. (زیرا همگرایی فقط به $|z| = r$ بستگی دارد.)



۲- ROC هیچ قطبی را شامل نمیشود.

۳- اگر x[n] سیگنال با طول محدود باشد، ROC همه صفحه z بجز احتمالا $z = 0$ و یا $z = \infty$ خواهد بود.

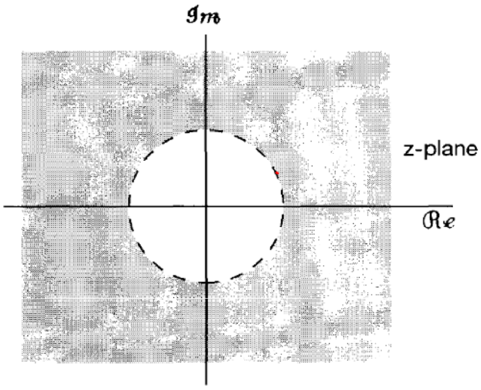
مثال ۴- تبدیل Z سیگنال ضربه و شیفت یافته آن:

$$\delta[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n]z^{-n} = 1, \quad ROC = \mathbb{C}$$

$$\delta[n-1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n-1]z^{-n} = z^{-1}. \quad |z| > 0$$

$$\delta[n+1] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta[n+1]z^{-n} = z, \quad |z| < \infty$$

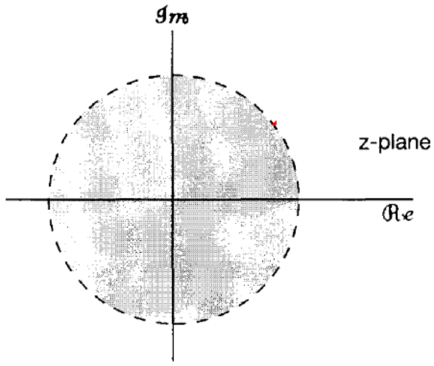
خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



۴- اگر $x[n]$ یک سیگنال راسترو باشد، آنگاه اگر دایره $|z| = r_0$ در ناحیه همگرایی باشد، همه مقادیر محدود z که $|z| > r_0$ نیز در ROC خواهد بود.

$$z = \infty \in ROC \text{ if } x[n] = 0, \quad n < 0$$

سیگنال علّی

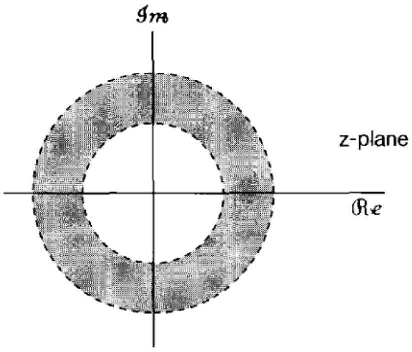


۵- اگر $x[n]$ یک سیگنال چپرو باشد، آنگاه اگر دایره $|z| = r_0$ در ناحیه همگرایی باشد، همه مقادیر غیر صفر z که $|z| < r_0$ نیز در ROC خواهد بود.

$$z = 0 \in ROC \text{ if } x[n] = 0, \quad n > 0$$

سیگنال ضدعلّی

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z



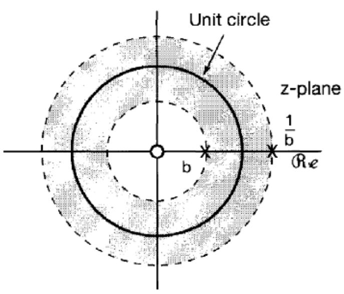
۶- اگر $x[n]$ سیگنال دوطرفه باشد، ناحیه همگرایی در صورت وجود، ناحیه طوقی شکل بین دو دایره خواهد بود.

مثال ۵- سیگنال نمایی دوطرفه $x[n] = b^{|n|}$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1].$$

$$b^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > |b|$$

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{|b|}.$$



$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |b| < |z| < \frac{1}{|b|}, \quad (|b| < 1)$$

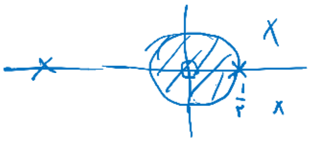
$$X(z) = \frac{b^2 - 1}{b} \frac{z}{(z - b)(z - b^{-1})}, \quad |b| < |z| < \frac{1}{|b|}.$$

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

۷- اگر X(z) یک تابع گویا باشد، آنگاه ROC توسط قطبها محدود میشود یا اینکه تا بینهایت گسترش می یابد.

۸- اگر X(z) گویا باشد و اگر x[n] سیگنال راسترو باشد، آنگاه ROC ناحیه خارجی دایره ای به شعاع دورترین قطب است. بعلاوه اگر x[n] سیگنال علی باشد (یعنی x[n]=0 , n<0) آنگاه ROC نقطه $z = \infty$ را هم شامل میشود.

۹- اگر X(z) گویا باشد و اگر x[n] سیگنال چپرو باشد، آنگاه ROC ناحیه داخلی دایره ای به شعاع نزدیکترین قطب است. بعلاوه اگر x[n] سیگنال ضد علی باشد (یعنی x[n]=0 , n>0) آنگاه ROC نقطه $z = 0$ را هم شامل میشود.



$|z| < \frac{1}{2}$ ضدعلی

$0 < |z| < \frac{1}{2}$: ضدعلی نباشد

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z

- **مثال ۶**- همه نواحی همگرایی ممکن برای تبدیل Z سیگنال x[n] با شکل جبری زیر را تعیین کنید.

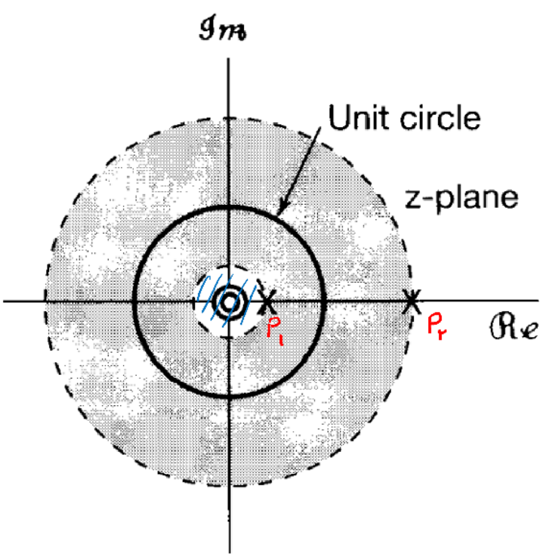
$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

$P_1 = \frac{1}{3}$, $P_2 = 2$, $X(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{3})(z-2)}$

I ناحیه : $|z| < \frac{1}{3}$: ضدعلی (چپرو)

II ناحیه : $\frac{1}{3} < |z| < 2$: دوطرفه

III ناحیه : $|z| > 2$: علی (راسترو)



تبدیل Z معکوس

- از ارتباط بین تبدیل Z و تبدیل فوریه استفاده میکنیم:

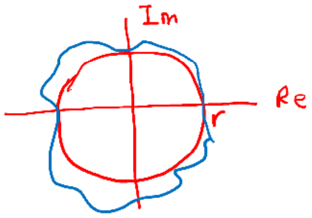
$$X(re^{j\omega}) = \mathfrak{F}\{x[n]r^{-n}\},$$

$$x[n]r^{-n} = \mathfrak{F}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}, \quad \Rightarrow \quad x[n] = r^n\mathfrak{F}^{-1}[X(re^{j\omega})].$$

$$x[n] = r^n\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,$$

$$z = re^{j\omega} \rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{dz}{jz}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})(re^{j\omega})^n d\omega. \quad \Rightarrow \quad \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz,}$$



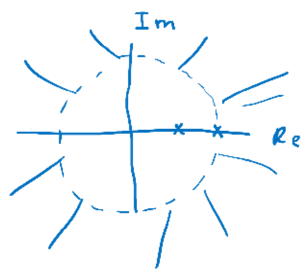
انتگرال در روی هر مسیر بسته حول مبدا و در داخل ناحیه همگرایی

محاسبه تبدیل Z معکوس برای توابع گویا

۱- تجزیه به کسرهای جزئی

مثال ۷- تبدیل Z معکوس تابع زیر:

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}.$$



$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad A = 1, \quad B = 2$$

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

اگر $ROC: \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ باشد:

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)$$

محاسبه تبدیل Z معکوس برای توابع گویا

۲- سری توانی

مثال ۸- $X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1},\ 0 < |z| < \infty.$

$$X(z) = \sum_n x(n) z^{-n} = ۴ z^{۲} + ۲ + ۳ z^{-۱}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(-۲) = ۴ \\ x(۰) = ۲ \\ x(۱) = ۳ \end{cases} \qquad \Rightarrow x(n) = ۴\,\delta(n+۲) + ۲\,\delta(n) + ۳\,\delta(n-۱)$$

$$x(n) = ۰,\ n \neq ۰, ۱, -۲$$

محاسبه تبدیل Z معکوس برای توابع گویا

مثال ۹- تبدیل Z معکوس $X(z) = e^{\frac{1}{z}}\ ,\ |z| > 0$

$$X(z) = e^{\frac{۱}{z}} = ۱ + \frac{۱}{z} + \frac{۱}{۲} z^{-۲} + \frac{۱}{۳!} z^{-۳} + \cdots + \frac{۱}{n!} z^{-n} + \cdots \quad , |z| > ۰$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{۱}{n!} u(n)$$

سیگنالها و سیستمها

فصل نهم: تبدیل Z

Z Transform

جلسه دوم

خواص تبدیل Z، تحلیل خواص سیستم در حوزه Z

مرور

- تبدیل Z سیگنال گسسته x[n] بصورت زیر تعریف میشود:

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

- مقادیری از z مختلط که به ازای آنها، سری مربوط به تبدیل Z همگراست، ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل Z را تشکیل میدهد.
- ارتباط با تبدیل فوریه: $X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$
- **خواص ROC**: $0 \le r_1 < |z| < r_2 \le \infty$

برای سیگنال علی، ROC ناحیه خارجی دایره شامل $z = \infty$ است.

اگر x[n] به ازای بعضی مقادیر منفی n دارای مقدار غیر صفر باشد: $z = \infty \notin \text{ROC}$

اگر x[n] به ازای بعضی مقادیر مثبت n دارای مقدار غیر صفر باشد: $z = 0 \notin \text{ROC}$

برای X(z) گویا، اگر x[n] سیگنال علی باشد، ROC ناحیه خارجی دایره ای شامل همه قطبهاست.

خواص تبدیل Z

فرض: $x_1[n] \leftrightarrow X_1(z)$, $\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1$ و $x_2[n] \leftrightarrow X_2(z)$, $\mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2$ و $x[n] \leftrightarrow X(z)$,$\mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

۱- خطی بودن: $ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z),\quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.$

۲- انتقال در زمان: $x[n-n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0}X(z)$ $\mathrm{ROC} = \mathrm{R} \pm \{0\} \pm \{\infty\}$

مثلا اگر x[n] سیگنال علی باشد، ناحیه همگرایی شامل $z = \infty$ است. حال اگر x[n] به چپ شیفت یابد، ممکن است دیگر سیگنال علی نباشد و در این حالت $z = \infty$ در ROC نخواهد بود.

۳- تغییر مقیاس در حوزه z: $z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right),\quad \text{with ROC} = |z_0|R$

در حالت خاص: $e^{j\omega_0 n}x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0}z)$

برای X(z) گویا، این عمل سبب دوران صفرها و قطبها به میزان ω_0 در صفحه z میشود.

۴- وارون زمانی: $x[-n] \xleftrightarrow{z} X(\frac{1}{z}),\quad \text{with ROC} = \frac{1}{R}$

مثال:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}},\qquad |z| > 1$$

$$\mathcal{Z}\{u[-n]\} = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$$

۵- انبساط زمانی:

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{z} X(z^k),\quad \text{with ROC} = R^{1/k}$$

که در آن، $x_k[n]$ منبسط شده سیگنال x[n] با ضریب k است (یعنی بین هر دو نمونه x[n]، به تعداد k-1 صفر افزوده شده است)

۶- مزدوج سیگنال: $x^*[n] \xleftrightarrow{z} X^*(z^*), \quad \text{with ROC} = R$

نتیجه: اگر $x[n]$ حقیقی باشد، $X(z) = X^*(z^*)$ و بنابراین اگر z_1 صفر (و یا قطب) $X(z)$ باشد، z_1^* نیز صفر (و یا قطب) آن است.

۷- کانولوشن: $x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z), \quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.$

مثال: فرض کنید ورودی یک سیستم انباشت برابر $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ باشد. خروجی سیستم را تعیین کنید.

۸- مشتق در حوزه Z: $nx[n] \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{with ROC} = R$

$X(z) = \sum x(n) z^{-n}$

$-\frac{dX}{dz} = \sum n x(n) z^{-n-1}$

$-z\frac{dX}{dz} = \sum_n n x(n) z^{-n}$

مثال: تبدیل معکوس Z تابع زیر را پیدا کنید:

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|,$$

$$\frac{dX}{dz} = \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}} \Rightarrow -z\frac{dX}{dz} = \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} = 1 - \frac{1}{1+az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

$$n x(n) = \delta(n) - (-a)^n u(n)$$

$$n x(n) = (-1)^{n+1} a^n u(n-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} a^n u(n-1)}$$

تعیین مقدار اولیه: $x(0) = 0$

7

مثال: تبدیل معکوس z تابع $|z| > |a|$, $X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2}$

$$x_1(n) = a^n u(n) \longleftrightarrow X_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

$$n a^n u(n) \longleftrightarrow -z \frac{dX_1}{dz} = (-z) \frac{(-az^{-2})}{(1-az^{-1})^2} = \frac{+az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$$

$$(n+1) \frac{a^{n+1}}{a} u(n+1) \longleftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \quad |z|>|a|$$

$$\Rightarrow x(n) = (n+1) a^n u(n)$$

8

۹- قضیه مقدار اولیه: اگر $x[n] = 0\ ,\ n < 0$ آنگاه:

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} + \frac{x(3)}{z^3} + \cdots$$

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

مثال: اگر $|z| > |a|$, $X(z) = \log(1 + az^{-1})$، مقدار x[0] را تعیین کنید.

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} \log(1+az^{-1}) = \log(1) = 0$$

تعمیم قضیه مقدار اولیه: اگر x[n] یک سیگنال راسترو باشد که: $x[n]=0,\ n<n_0$ آنگاه:

$$x[n_0]=\lim_{z\to\infty} z^{n_0}X(z)$$

مثال: فرض کنید x[n]=u[n+2] در اینصورت:

$$X(z)=\frac{z^2}{1-z^{-1}},\qquad 1<|z|<\infty$$

$$x[-2]=\lim_{z\to\infty} z^{-2}X(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{1-z^{-1}}=1$$

تحلیل خواص سیستم در حوزه Z

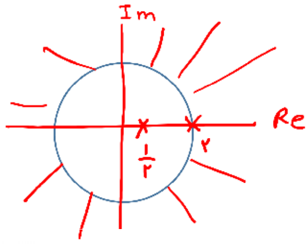
- علی بودن:
  - یک سیستم LTI گسسته، علی است اگر و تنها اگر ROC تابع تبدیل آن، ناحیه خارجی یک دایره شامل **بینهایت** باشد.
  - یک سیستم LTI گسسته با تابع تبدیل گویا علی است اگر و تنها اگر الف) ROC تابع تبدیل آن، ناحیه خارجی دایره دربرگیرنده همه قطبها باشد و ب) درجه صورت تابع تبدیل (بر حسب توانهای z) از درجه مخرج آن بیشتر نباشد.

مثال: سیستم با تابع تبدیل $H(z)=\frac{z^3+2z+4}{z^2+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}}$ صرفنظر از ROC نمیتواند علی باشد چرا که درجه صورت آن از مخرج بیشتر است.

تحلیل خواص سیستم در حوزه Z (علی بودن)

مثال: سیستم با تابع تبدیل زیر علی است:

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}, \quad |z| > 2$$



زیرا:

$$H(z) = \frac{2-\frac{5}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{2z^2-\frac{5}{2}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1},$$

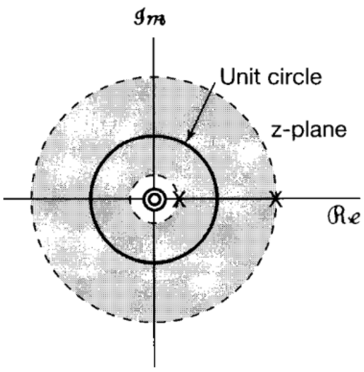
که درجه صورت از درجه مخرج بیشتر نیست و ROC نیز خارج دایره ای است که هر دو قطب $z = 2$ و $z = 1/2$ را دربرمیگیرد.

$z = \infty \in ROC$

تحلیل خواص سیستم در حوزه Z

- پایداری: $h(n)$ وجود تبدیل فوریه $\equiv \left(\sum_n |h(n)| < \infty\right)$
  - یک سیستم LTI، پایدار است اگر و تنها اگر ROC تابع تبدیل سیستم دایره واحد ($|z| = 1$) را شامل شود.
  - یک سیستم LTI **علی** با تابع تبدیل گویا پایدار است اگر و تنها اگر همه قطبهای سیستم، داخل دایره واحد باشند.

مثال: در مورد علی بودن و پایداری سیستم با شکل جبری تابع تبدیل بصورت زیر در نواحی همگرایی مختلف بحث کنید:



$$H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}$$

(I) $|z| < \frac{1}{3}$: غیرعلی (ضدعلی) ، ناپایدار

(II) $\frac{1}{3} < |z| < 2$: پایدار و غیرعلی

(III) $|z| > 2$: علی و ناپایدار

سیگنالها و سیستمها

فصل نهم: تبدیل Z

Z Transform

جلسه سوم

سیستمهای LCCDE، نمایش بلوکی، تبدیل Z یکطرفه

مرور

- تبدیل Z سیگنال گسسته x[n] بصورت زیر تعریف میشود:

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

- خواص تبدیل Z:

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0}X(z)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X_1(z)X_2(z), \quad \text{with ROC containing } R_1 \cap R_2.$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X^*(z^*), \quad \text{with ROC} = R$$

سیستمهای LCCDE

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M}\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

N>M فرض

N-M صفر در مبدا

M تا صفر خارج مبدا

N قطب خارج مبدا

(N>M)

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-C_k z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$h(n)=\sum A_k C_k^{n} u(n)$$

با فرض علی بودن

H(z) تابع گویا از z است و بنابراین پاسخ ضربه بصورت مجموع چند سیگنال نمایی خواهد بود.

بسته به ناحیه همگرایی، پاسخ ضربه میتواند یک سیگنال علی، ضد علی یا دوطرفه باشد.

سیستمهای LCCDE

مثال: یک سیستم LTI با معادله تفاضلی زیر توصیف شده است: $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$

الف- اگر سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه سیستم را تعیین کنید.

$$\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z)=X(z)$$

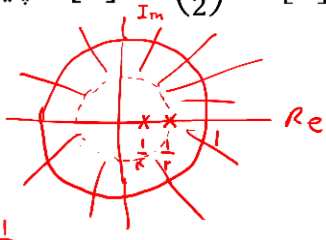
ب- اگر سیستم علی باشد، پاسخ سیستم به ورودی $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ چیست؟

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$H(z)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$h[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$



ب- $H(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})},\quad |z|>\frac{1}{2}$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-\frac{1}{4}z^{-1})},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$Y(z)=\frac{A=2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}+\frac{B=-2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{C=1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}},\quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$y(n)=\left[2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

مثال: فرض کنید اطلاعات زیر در مورد یک سیستم LTI داده شده است. معادله تفاضلی حاکم بر سیستم را تعیین کنید:

الف- به ازای ورودی $x_1[n] = (1/6)^n u[n]$ خروجی بصورت $y_1[n] = [a(1/2)^n + 10(1/3)^n]u[n]$ است.

ب- اگر $x_2[n] = (-1)^n$ آنگاه $y_2[n] = \frac{7}{4}(-1)^n$ است.

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}} , \quad |z| > \frac{1}{6}$$

$$Y_1(z) = \frac{a}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{10}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} , \quad |z| > \frac{1}{2} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{10+a-(5+\frac{a}{3})z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{(10+a-(5+\frac{a}{3})z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$x_2(n) = (-1)^n \longrightarrow y_2(n) = H(-1)(-1)^n = \frac{7}{4}(-1)^n \Rightarrow H(-1) = \frac{7}{4}$$

$$\rightarrow H(-1) = \frac{15+\frac{4}{3}a}{2} \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = -9$$

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{6}z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

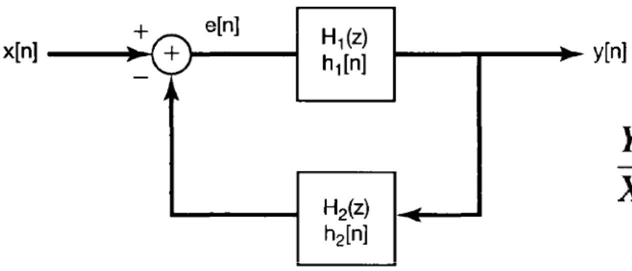
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})Y(z) = (1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2})X(z)$$

$$\Rightarrow y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x(n) - \frac{13}{6}x(n-1) + \frac{1}{3}x(n-2)$$

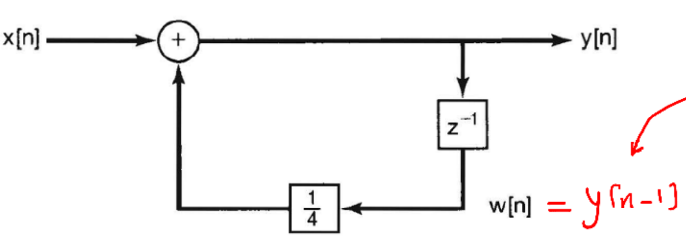
نمایش بلوک دیاگرامی سیستم LCCDE علی

- یادآوری از اتصال فیدبکی:



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

- مثال از کاربرد: نمایش بلوکی سیستم $H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ یا سیستم با معادله $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$.



$W(z) = z^{-1}\, Y(z) \Rightarrow \frac{1}{4}W(z) + X(z) = Y(z)$

$X(z) = Y(z)(1-\frac{1}{4}z^{-1})$

$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

$y(n) = x(n) + \frac{1}{4}w(n)$

$= x(n) + \frac{1}{4}y(n-1)$

$\Rightarrow y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = x(n)$

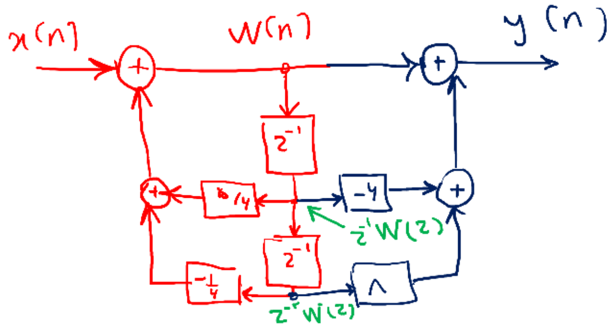
نمایش بلوک دیاگرامی سیستم LCCDE علی

۱- روش مستقیم

مثال: $H(z) = \frac{1-6z^{-1}+8z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-6z^{-1}+8z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \cdot \frac{W(z)}{W(z)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(z) = (1-6z^{-1}+8z^{-2})\,W(z) \\ X(z) = (1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})\,W(z) \Rightarrow W(z) = X(z) + \frac{5}{6}z^{-1}W(z) - \frac{1}{6}z^{-2}W(z) \end{cases}$$

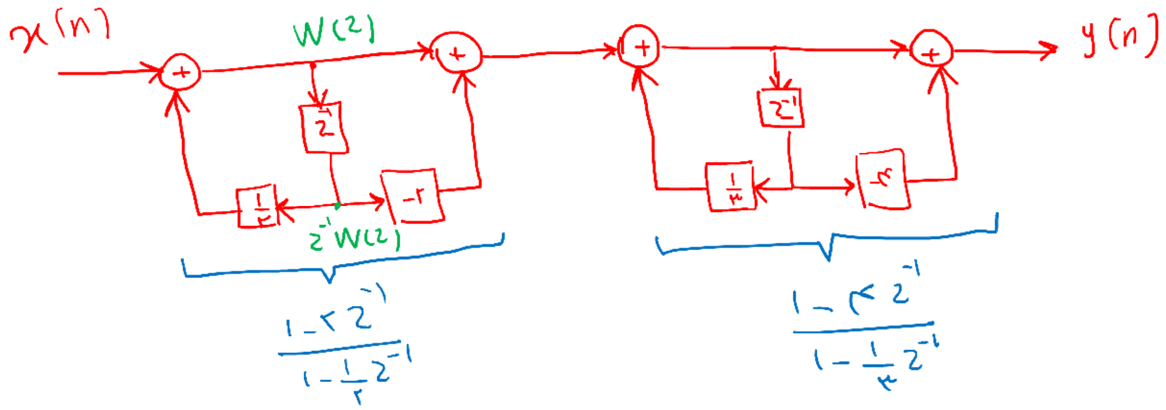


نمایش بلوک دیاگرامی سیستم LCCDE علی

۲- روش متوالی

مثال: $H(z) = \frac{1-6z^{-1}+8z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

$$H(z) = \frac{(1-2z^{-1})(1-4z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1-4z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$



نمایش بلوک دیاگرامی سیستم LCCDE علی

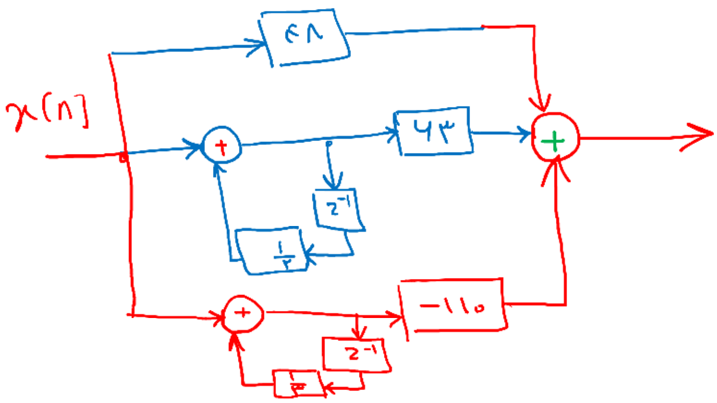
۳- روش موازی

مثال: $H(z) = \frac{1-6z^{-1}+8z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

$$H(z) = 48 + \frac{34z^{-1} - 47}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$= 48 + \frac{A = 63}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B = -110}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\begin{array}{l|l} 8t^2 - 6t + 1 & \frac{1}{6}t^2 - \frac{5}{6}t + 1 \\ \hline 8t^2 - 40t + 48 & 48 \\ \hline 34t - 47 & \end{array}$$



تبدیل Z یکطرفه

- تعریف: $X_u(z) = \mathcal{UZ}\{x[n]\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$
- وقتی سیگنال علی باشد: $X_{\mathcal{U}}(z) = X(z)$
- همواره داریم: $\mathcal{UZ}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]u[n]\}$

$$\mathcal{UZ}\{a^n u[n]\} = \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a| \xleftarrow{\text{مثال}}$$

- بنابراین ناحیه همگرایی تبدیل Z یکطرفه، ناحیه خارجی دایره شامل بینهایت خواهد بود.

مثال: $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$

$$X(z) = \frac{z}{1-az^{-1}}, \quad |a|<|z|<\infty$$

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = a\sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{a}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

تبدیل Z یکطرفه

مثال: $X_{\mathcal{U}}(z) = \frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$ میخواهیم سیگنال x[n] را تعیین کنیم.

$$X_u(z) = \frac{A=-۳}{1-\frac{1}{۲}z^{-1}} + \frac{B=۴}{1-\frac{1}{۳}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{۲}$$

$$x[n] = -۳\left(\frac{1}{۲}\right)^n u[n] + ۴\left(\frac{1}{۳}\right)^n u[n]$$

تبدیل Z یکطرفه

مثال: تابع $F(z) = \frac{z^2+1}{z+3}$ را در نظر بگیرید. آیا میتوان سیگنال x[n] را بگونه ای تعیین کرد که تبدیل Z یکطرفه آن برابر F(z) شود؟

$\lim_{z \to \infty} F(z) \longrightarrow \infty \Rightarrow z = \infty \notin ROC$

پس F(z) نمی‌تواند تبدیل Z یکطرفه یک سیگنال باشد

خواص تبدیل Z یکطرفه

- همه خواص تبدیل Z دوطرفه (به استثنا اصلاحات در روابط زیر) برای تبدیل Z یکطرفه برقرار است:

تاخیر زمانی: $x_1(n) = x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X_u(z) + x[-1]$

$$X_{1u}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-1) z^{-n} = \sum_{m=-1}^{\infty} x(m) z^{-m-1}$$

$$= x(-1) + \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n-1} = x(-1) + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$= x(-1) + z^{-1} X_u(z)$$

تقدم زمانی: $x[n+1] \leftrightarrow zX_u(z) - zx[0]$

کانولوشن: اگر $x_1[n]$ و $x_2[n]$ هر دو سیگنال علی باشند: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_{1u}(z)X_{2u}(z)$

تبدیل Z یکطرفه

مثال: حل معادله تفاضلی $y[n]+2y[n-1]=\alpha u[n]$ با شرط اولیه $y[-1]=\beta$: (بازای $n\geq 0$)

$$Y_u(z)+2z^{-1}Y_u(z)+2y[-1]=\frac{\alpha}{1-z^{-1}}$$

$$Y_u(z)=\frac{\frac{\alpha}{1-z^{-1}}-2\beta}{1+2z^{-1}}=\frac{\alpha-2\beta+2\beta z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}=\frac{A=\frac{\alpha}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{B=\frac{\alpha-3\beta}{3/2}}{1+2z^{-1}}$$

$$y[n]=\frac{\alpha}{3}u[n]+\frac{2}{3}(\alpha-3\beta)(-2)^n u[n]$$